

# КИБЕРНЕТИКА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

CYBERNETICS AND COMPUTER ENGINEERING

Выпуск 179

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 1965 г.

Периодичность: 4 раза в год

КИЕВ 2015

## СОДЕРЖАНИЕ

### Информатика и информационные технологии

- Вовк М.И., Галян Е.Б.* Персонализована бiотехнiчна система для вiдновлення речi ..... 5
- Доценко С.И.* Теоретико-игровой подход к задачам координации действий с обменом информацией ..... 20

### Интеллектуальное управление и системы

- Norkin V.V.* On the Approximation of Vector Optimization Problems  
*Норкин В.В.* Об аппроксимации задач векторной оптимизации..... 35
- Романенко В.Д., Мильявский Ю.Л.* Стабилизация импульсных процессов в когнитивных картах сложных систем на основе модальных регуляторов состояния ..... 43
- Городецкий В.Г., Осадчук Н.П.* Алгоритм реконструкции динамических систем по одной наблюдаемой переменной ..... 56

### Медицинская и биологическая кибернетика

- Наджафян Тумаджани М., Будник Н.Н., Коваленко А.С.* Оценка степени негомогенности электрических процессов в желудочках сердца по данным магнитокардиографии ..... 70
- Пашинская С.Л., Антомонов М.Ю.* Обратная задача интегрального оценивания: выявление критических составляющих медико-экологической ситуации ..... 81
- Авторы номера** ..... 93

УДК 681.5 + 621.391:01

В журнале представлены результаты исследований в области теории и практики интеллектуального управления, информационных технологий, а также биологической и медицинской кибернетики.

Для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов вузов соответствующих специальностей.

У журналі надано результати досліджень у галузі теорії та практики інтелектуального керування, інформаційних технологій, а також біологічної та медичної кібернетики.

Для наукових співробітників, інженерів, аспірантів і студентів вузів відповідних спеціальностей.

The results of research in the field of theory and practice of information technologies, intellectual control, biological and medical cybernetics are presented.

It is intended for researchers, practical engineers, post-graduate students of corresponding specialties.

#### **Редакционная коллегия**

**И.В. Сергиенко**, акад. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. (главный редактор),

**В.И. Гриценко**, к.т.н., чл.-к. НАНУ (главный редактор),

**Л.М. Козак**, д.б.н. (заместитель главного редактора),

*Технические науки:* Гаращенко Ф.Г., д.т.н., проф. (Киев), Губарев В.Ф., д.т.н., чл.-к. НАНУ, (Киев), Hänßgen Klaus, prof. (Leipzig, Germany), Кунцевич В.М., д.т.н., акад. НАНУ (Киев), Павлов В.В., д.т.н., проф. (Киев), Тимофеева Н.К., д.т.н. (Киев), Файнзильберг Л.С., д.т.н. (Киев).

*Физико-математические науки:* Анисимов А.В., д.ф.-м.н., чл.-к. НАНУ (Киев), Глибовец Н.Н., д.ф.-м.н., проф. (Киев), Гупал А.М., д.ф.-м.н., чл.-к. НАНУ (Киев), Модрухович Б.Ш., д.ф.-м.н., проф. (Detroit, USA), Онопчук Ю.Н., д.ф.-м.н., проф. (Киев), Ченцов А.Г., д.ф.-м.н., чл.-корр РАН (Екатеринбург, Россия), Чикрий А.А. д.ф.-м.н., чл.-к. НАНУ (Киев), Шлезингер М.И., д.ф.-м.н., проф. (Киев).

*Медицинские науки:* Белов В.М., д.м.н., проф. (Киев), Бычков В.В. д.м.н. (Киев), Ganushchak Yuri, MD, PhD (Maastricht, Netherlands), Годлевский Л.С., д.м.н., проф. (Одесса), Голубчиков М.В., д.м.н., проф. (Киев), Коваленко А.С., д.м.н., проф. (Киев), Майоров О.Ю., д.м.н., проф. (Харьков).

*Биологические науки:* Антомонов М.Ю., д.б.н., проф. (Киев), Кальниш В.В., д.б.н., проф. (Киев), Кифоренко С.И., д.б.н. (Киев), Книгавко В.Г., д.б.н., проф. (Харьков), Котова А.Б., д.б.н., проф. (Киев), Лябах Е.Г., д.б.н. (Киев), Navakatikyan Michael, PhD, BSc (Australia).

#### **Научные разделы:**

**Информатика и информационные технологии**

**Интеллектуальное управление и системы**

**Медицинская и биологическая кибернетика**

Журнал «Кибернетика и вычислительная техника» включен в перечень профильных изданий МОН Украины по техническим, физико-математическим наукам (протокол № 1528, 29.10.2014), биологическим, медицинским наукам (протокол № 261, 06.03.2015).

Журнал включен в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

Утверждено к печати ученым советом

Международного научно-учебного центра

информационных технологий и систем Национальной академии наук Украины

и Министерства образования и науки Украины (протокол №2 от 26.02.2015)

План выпуска 2015 г.

Адрес редколлегии:

03680 Киев ГСП, просп. Академика Глушкова, 40

Международный научно-учебный центр

информационных технологий и систем НАН Украины

и Министерства образования и науки Украины

Тел: 503 95 62. E-mail: kvt@irtc.org.ua сайт: kvt.irtc.org.ua

Редактор *Л.М. Иванов*. Компьютерная верстка *А.В. Тупальский*

---

Свидетельство о государственной регистрации КВ № 12649-1533Р от 14.05.2007

# КИБЕРНЕТИКА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

CYBERNETICS AND COMPUTER ENGINEERING

Issue 179

---

SCIENTIFIC JOURNAL

KIEV 2015

Founded in 1965

Periodicity: 4 issues per year

## TABLE OF CONTENTS

### Informatics and Information Technologies

|  |    |
|--|----|
| <i>Vovk M.I., Galyan Ye.B.</i> Personalized Biotechnical System to Restore Speech .....                          | 5  |
| <i>Dotsenko S.I.</i> On Game-Theoretical Approach in Action Coordination Problems with Information Exchange..... | 20 |

### Intellectual Control and Systems

|   |    |
|---|----|
| <i>Norkin B.V.</i> On the Approximation of Vector Optimization Problems .....   | 35 |
| <i>Romanenko V.D., Milyavskiy Y.L.</i> Impulse Processes Stabilization in Cognitive Maps of Complex Systems Based on Modal State Regulators ..... | 43 |
| <i>Gorodetskiy V.G., Osadchuk M.P.</i> Algorithm for Reconstructing the Dynamical Systems Using One Observable Variable .....                     | 56 |

### Medical and Biological Cybernetics

|  |    |
|--|----|
| <i>Najafian Toomajani M., Budnyk M.M., Kovalenko O.C.</i> Evaluation Degree of Inhomogeneity Electrical Processes in the Heart Ventricles According Magnetocardiografy ..... | 70 |
| <i>Pashinskaia S.L., Antomonov M.Yu.</i> Inverse Problems of Integrated Evaluation: Identification of Critical Components .....  | 81 |

|                          |    |
|--------------------------|----|
| <b>Our authors</b> ..... | 93 |
|--------------------------|----|

# КІБЕРНЕТИКА ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

CYBERNETICS AND COMPUTER ENGINEERING

Випуск 179

НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ  
Заснований у 1965 р.  
Періодичність: 4 рази на рік

КИЇВ 2015

## ЗМІСТ

### Інформатика та інформаційні технології

|  |    |
|--|----|
| <i>Вовк М.І., Галян Є.Б.</i> Персоніфікована біотехнічна система для відновлення мови .....        | 5  |
| <i>Доценко С.І.</i> Теоретико-ігровий підхід до завдань координації дій з обміном інформації ..... | 20 |

### Інтелектуальне керування та системи

|  |    |
|--|----|
| <i>Норкін Б.В.</i> Про апроксимацію задач векторної оптимізації .....  | 35 |
| <i>Романенко В.Д., Мілявський Ю.Л.</i> Стабілізація імпульсних процесів у когнітивних картах складних систем на основі модальних регуляторів стану ..... | 43 |
| <i>Городецький В.Г., Осадчук М.П.</i> Алгоритм реконструкції динамічних систем за однією спостережною змінною .....                                      | 56 |

### Медична та біологічна кібернетика

|   |    |
|---|----|
| <i>Наджафіан Тумаджани М., Будник М.М., Коваленко О.С.</i> Оцінка ступеня негомогенності електричних процесів у шлуночках серця за даними магнітокардіографії ..... | 70 |
| <i>Пашинська С.Л., Антомонов М.Ю.</i> Обернена задача інтегрального оцінювання: виявлення критичних складових .....   | 81 |

|                                     |    |
|-------------------------------------|----|
| <b>Інформація про авторів</b> ..... | 93 |
|-------------------------------------|----|

# Информатика и информационные технологии

УДК 002.53:004.8

## ПЕРСОНИФИЦИРОВАННАЯ БИОТЕХНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ РЕЧИ

**М.И. Вовк, Е.Б. Галян**

*Международный научно-учебный центр информационных технологий и систем НАН Украины и МОН Украины*

В работе представлена структурно-функциональная модель персонифицированной биотехнической системы управления движениями кисти для восстановления речи, определены структура и функциональное назначение ее компонентов. Рассмотрена функциональная взаимосвязь между компонентами системы, преобразование и «упорядочение» информации, циркулирующей внутри компонентов и между ними. Особое внимание уделено информационному компоненту, обеспечивающему поддержку деятельности оператора по формированию единого алгоритма функционирования системы. Описаны его структура, информационное наполнение и пути реализации.

**Ключевые слова:** персонифицированная биотехническая система, восстановление речи, информационная технология, управление движениями кисти, структурно-функциональная модель, поддержка принятия решений.

У роботі представлена структурно-функціональна модель персоніфікованої біотехнічної системи керування рухами кисті для відновлення мови, визначені структура та функціональне призначення її компонентів. Розглянуто функціональний взаємозв'язок між компонентами системи, перетворення та «впорядкування» інформації, що циркулює всередині компонентів та між ними. Особливу увагу приділено інформаційному компоненту, який забезпечує підтримку діяльності оператора з формування єдиного алгоритму функціонування системи. Описано його структура, інформаційне наповнення та шляхи реалізації.

**Ключові слова:** персоніфікована біотехнічна система, відновлення мовлення, інформаційна технологія, керування рухами кисті, структурно-функціональна модель, підтримка прийняття рішень.

### ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при ряде патологий нервной системы нарушения двигательных функций (у взрослых) и нарушения в развитии двигательных функций у детей часто сопровождаются и речевыми нарушениями, что показывает взаимосвязь речевой и двигательной функций [1, 2]. Так при нарушении работы центральной нервной системы, например вследствие острого нарушения мозгового кровообращения (ОНМК), инсульта, наблюдаются не только нарушения в управлении движениями (гемипарез, гемиплегия), но и, в 50–60% случаев, речевые нарушения. Одним из распространенных речевых нарушений у таких пациентов является моторная

афазия (32,7% случаев [3]) вследствие поражения моторной речевой зоны коры головного мозга — области Брока — центрального звена моторного компонента речи, в котором формируется программа высказывания.

В клинической практике для лечения двигательных нарушений и речи по типу моторной афазии, как правило, используют медикаментозную терапию, лечебную физкультуру, занятия с логопедом, электростимуляцию мышц верхних и нижних конечностей. Анализ базового курса лечения показывает, что разная степень улучшений речи наблюдается у 40% таких пациентов [4]. Поиск новых методологических подходов, методов и технологий, повышающих эффективность восстановления утраченной функции речи, является актуальной теоретико-прикладной задачей современной реабилитологии и физиотерапии. Таким подходом является предложенный нами метод и разработанная на его основе информационная технология целенаправленного управления движениями пострадавшей кисти и пальцев рук по разнообразным программам, которые предоставляет программно-аппаратный комплекс управления движениями [4, 5, 6]. Теоретическим обоснованием технологии были уже упомянутая связь двигательной и речевой функций, величина корковой проекции движений кисти, ее близость к моторной речевой зоне, положительное влияние тренировки тонких движений пальцев рук на развитие речи ребенка [5]. Клиническая апробация технологии показала увеличение эффективности реабилитации речи при моторной афазии на 27% по сравнению с базовым курсом лечения, что дает основание для ее широкого использования в клинической практике.

## **Постановка задачи**

Успех внедрения технологии восстановления речи в значительной мере определяется включением информационного компонента в систему, выполняющего роль информационной поддержки практического использования биотехнической системы целенаправленного управления движениями кисти как средства опосредованного, через восстановление движений кисти, влияния на восстановление речи. Необходимость в информационной поддержке возникает, прежде всего, потому, что рассматриваемая технология восстановления речи, центральным звеном которой является биотехническая система управления движениями кисти, предусматривает различные движения кисти и пальцев рук, подлежащие тренировке, разнообразие методов, программ и параметров сигналов управления движениями [4]. Такое разнообразие средств обеспечивает персонализированный подход к восстановительному лечению, к персонально ориентированной активации резервов организма на восстановление речи в зависимости от нозологического статуса пациента и состояния его двигательных и речевых функций. При персонализированном подходе перед оператором возникает проблема многокритериального выбора параметров реабилитационного курса в зависимости от индивидуальных параметров нозологического статуса пациента. При этом параметры нозологического статуса являются динамическими величинами — соответственно и параметры процедур от сеанса к сеансу также могут

изменяться в течение одного курса реабилитации. Кроме того, при использовании технологии восстановления речи в лечебном учреждении возникает необходимость в быстром, эффективном приобретении и усвоении знаний о технологии, приобретении навыков по практической работе, что требует разработки новых методических рекомендаций по овладению предложенными методикой и технологией лечения.

**Цель** настоящей статьи: разработать структурно-функциональную модель персонифицированной биотехнической системы (ПБТС) восстановления речи (ВР) и определить структурную и функциональную взаимосвязь информационного компонента с другими компонентами системы

Достижение поставленной цели включает решение следующих задач:

— определить структуру, функциональное назначение, информационное наполнение и пути реализации входящих в систему компонентов (функциональных блоков);

— определить взаимосвязь между компонентами системы, преобразование и «упорядочение» информации, циркулирующей внутри компонентов и между компонентами.

## **МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ**

В работе использованы следующие методы:

— информационно-структурное и структурно-функциональное моделирование — для понимания структурно-функциональной организации рассматриваемой системы;

— унифицированный язык моделирования (Unified Modeling Language — UML) — для детализации особенностей алгоритмической и логической реализации операций, выполняемых информационным компонентом системы.

## **СТРУКТУРА И СПЕЦИФИКА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПБТС ВОССТАНОВЛЕНИЯ РЕЧИ**

Структурно-функциональную организацию биотехнической системы целенаправленного управления движениями кисти для восстановления речи будем рассматривать с точки зрения обобщенного представления о структуре и специфичности функционирования БТС. Под биотехнической системой понимают комплексную систему, включающую в себя объект (биосистемы разного уровня иерархии в норме и при патологии) исследования (диагностики) и/или управления (профилактики, лечения, реабилитации); оператора (исследователя или врача) и техническую подсистему, в том числе компьютер, объединенные единым алгоритмом функционирования [7, 8]. Специфика таких систем и сложность синтеза определяются не только сложностью и специфичностью объекта исследования и/или управления, но и сложностью и специфичностью взаимодействия человека с остальными компонентами системы.

Рассмотрим компоненты ПБТС ВР (рис.1).

© М.И. Вовк, Е.Б. Галян, 2015

ISSN 0452-9910. Кибернетика и вычисл. техника. 2015. Вып. 179

Объект управления — пациент с нарушениями двигательных функций по типу правостороннего гемипареза и нарушениями речи по типу моторной афазии разной степени тяжести вследствие перенесенного острого нарушения мозгового кровообращения. Специфика объекта управления рассматриваемой системы состоит в том, что оператор, по сути, взаимодействует с двумя объектами управления. Один — непосредственный. Это тонкая моторика кисти (мышечные сокращения кисти и пальцев). Второй, опосредованный, — речь (моторный компонент речи). Восстановление речи достигается на

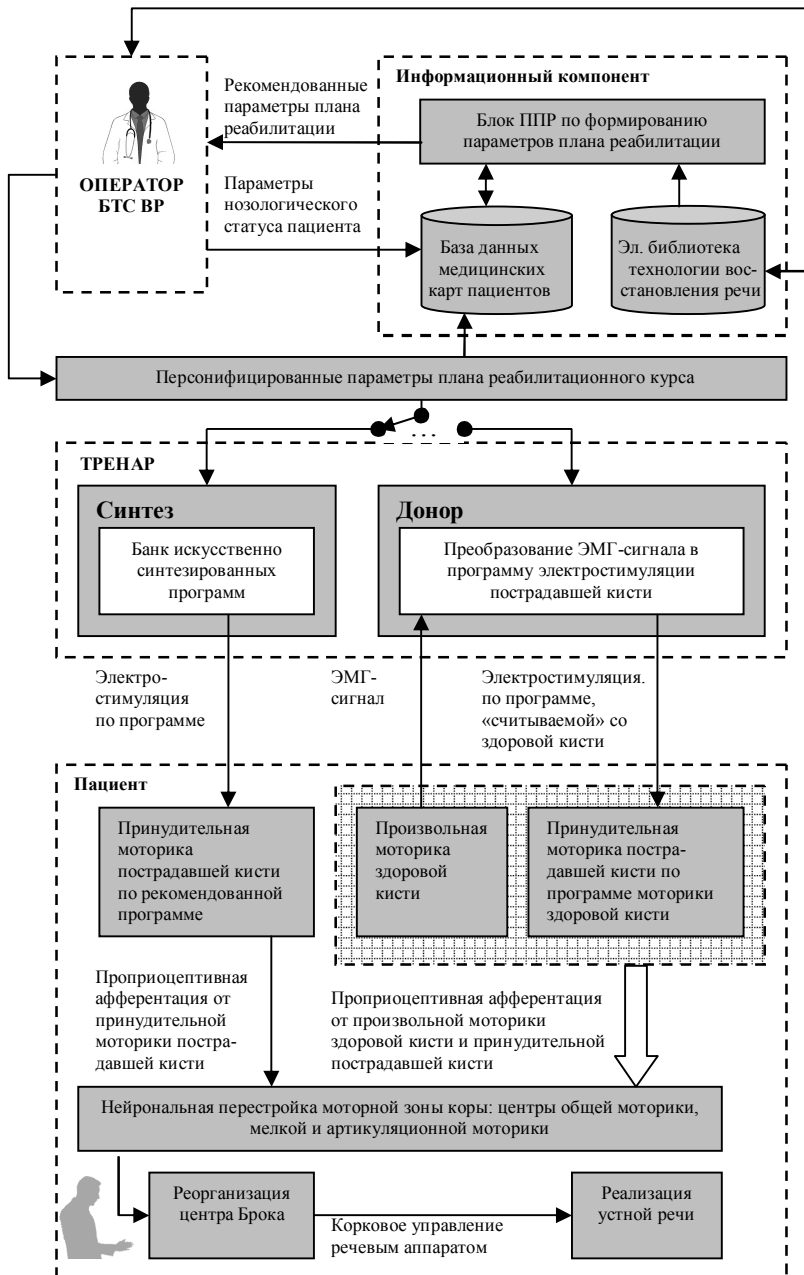


Рис. 1. Структурно-функциональная модель персонализированной биотехнической системы восстановления речи



основе реорганизации исполнительного звена центра Брока, осуществляющего корковое управление периферическим речевым аппаратом. Реорганизация центра Брока происходит под влиянием нейрональной перестройки моторной зоны коры, которая, в свою очередь, происходит благодаря ее активации под влиянием проприоцептивной афферентации при мышечных сокращениях кисти и пальцев пострадавшей и здоровой кисти.

Оператор системы, в роли которого может выступать врач-невропатолог, реабилитолог, младший медицинский персонал, — это лицо, отвечающее за назначение курса реабилитации и/или проведение процедур. Оператор является активным объединяющим звеном системы, который обеспечивает единый алгоритм функционирования технической подсистемы БТС и всей системы в целом.

Техническая подсистема состоит из двух элементов. Это аппаратно-программный комплекс управления движениями ТРЕНАР, задающий сигналы, под действием которых происходит целенаправленное управление движениями мелкой моторики пострадавшей кисти по разнообразным методам и программам [9], и персональный компьютер, на котором реализован специализированный программный модуль — информационный компонент технической подсистемы [10].

Информационный компонент, включаемый в техническую подсистему БТС ВР — это редуцированная консультативная экспертная система продукционного типа с использованием правил «если ... то ...», в которой объект управления представлен опосредованно через набор параметров, характеризующих нозологический статус пациента, в том числе состояние его двигательных и речевых функций.

Информационный компонент (программный модуль) ориентирован на выполнение следующих основных функций:

1) предоставление оператору информации по формированию персонализированных планов реабилитационных курсов — биологически и медицински верифицированный информационный продукт, который рекомендуется оператору для проведения тренировки движений кисти с возможностью корректировать процедуру тренировки на протяжении курса реабилитации (от сеанса к сеансу);

2) по запросу оператора предоставление информации о технологии, ее составных частях: функционировании аппаратно — программного комплекса ТРЕНАР при различных программах управления движениями, видах движений тонкой моторики кисти, топологии подведения управляющих сигналов к мышцам и др.;

3) предоставление оператору инструментария для ведения протокола лечебных мероприятий в реабилитационном курсе восстановления речи, хранения клинической информации, ее обработки и анализа.

Функциональность информационного компонента обеспечивается элементами: блоком поддержки принятия решений (ППР) по формированию параметров плана реабилитации, электронной библиотекой технологии восстановления речи, базой данных электронных медицинских карт пациентов.

## АЛГОРИТМ ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ ПБТС ВОССТАНОВЛЕНИЯ РЕЧИ

Рассматриваемый алгоритм состоит в следующем. Оператор ПБТС ВР, взаимодействуя с информационным компонентом, подает на вход системы начальные данные — диагноз и параметры нозологического статуса пациента, значимые для проведения курса восстановления речи: перечень сопутствующих заболеваний, глубина патологии движений и выраженность спастических процессов в поврежденной кисти, наличие нарушений когнитивной и эмоционально-волевой сфер [11]. Параметры нозологического статуса записываются в электронную медицинскую карту пациента. Далее при активном участии оператора управление информационным потоком передается в блок ППР по формированию параметров плана реабилитационного курса. В блоке ППР происходит анализ поступивших данных. С помощью хранящихся в электронной библиотеке знаний о методах и программах технологии управления движениями кисти для восстановления речи — верифицированного банка решенных задач, блок ППР формирует рекомендации по выбору параметров реабилитационного курса в целом и параметров отдельных процедур (рис. 1). Оператор, основываясь на рекомендованных параметрах плана реабилитации и собственном клиническом опыте, определяет персонифицированные параметры плана реабилитационного курса: количество сеансов тренировки в курсе реабилитации, длительность одного сеанса и тренировки одного движения в рамках сеанса, набор тренируемых движений, метод и программы тренировки для каждого движения. Другие параметры сеансов тренировки предоставляются оператору в виде гиперссылки на соответствующие разделы электронной библиотеки.

Персонифицированные параметры сохраняются в базе данных электронных медицинских карт пациентов и доступны в течение всего реабилитационного курса. В случае изменения нозологического статуса пациента в течение курса реабилитации персонифицированные параметры корректируются в соответствии с обновленными данными. Кооперация оператора с элементами информационного компонента осуществляется через графический интерфейс пользователя [10].

После определения персонифицированных параметров реабилитационного курса оператор обращается ко второму элементу технической подсистемы ПБТС ВР — аппаратно-программному комплексу ТРЕНАР. Рассмотрим набор тренировочных программ, информационные потоки и их преобразование в процессе поступления в моторную зоны коры головного мозга.

*Программа «Синтез»* — электростимуляция мышц поврежденной кисти по искусственно синтезированным программам. Результатом тренировки принудительной моторики пострадавшей кисти является проприоцептивная афферентация.

*Программа «Донор»* — электростимуляция мышц по программам, которые «считываются» с мышц здоровой кисти пациента при выполнении им симметричных тренируемым произвольных движений, и передаются

тренируемым мышцам поврежденной кисти в он-лайнном режиме. Пациент самостоятельно изменяет программу тренировки, осуществляет контроль ее выполнения. При этом информационный поток, идущий в поврежденную моторную зону коры головного мозга, состоит из проприоцептивных импульсов, как от произвольных сокращений-расслаблений мышц здоровой кисти, так и принудительных сокращений-расслаблений мышц поврежденной кисти.

*Программа «Порог»* — тренировка соотношения принудительно-произвольных сокращений по методу пороговой электростимуляции, направлена на увеличение вклада произвольной моторики. При этом проприоцептивная афферентация от произвольной моторики пострадавшей кисти предшествует проприоцептивной афферентации от принудительной моторики, подготавливая, таким образом, нейроны моторной коры к восприятию управляющих воздействий.

*Программа «Биотренировка»* — тренировка произвольных сокращений-расслаблений мышц пострадавшей кисти по методу биологической обратной связи с использованием электромиографического (ЭМГ) сигнала тренируемой мышцы, преобразованного в световые и звуковые информационные сигналы. При тренировке движений пострадавшей кисти по данной программе ключевые параметры мышечной активности (сила и скорость сокращения мышц), ранее недоступные сознанию, становятся доступными в виде зрительных и слуховых образов. А информационный поток, поступающий в центральную нервную систему, представляет собой афферентный синтез сигналов от проприоцептивной, слуховой, зрительной сенсорных систем. Это обеспечивает активацию дополнительных механизмов для нейрональной перестройки поврежденной моторной зоны коры головного мозга.

Отметим, что для упрощения на рис. 1 представлена функциональная взаимосвязь, формирование, преобразование и передача информационных потоков между компонентами ПБТС ВР только для двух программ тренировки: «Синтез» и «Донор».

Как было сказано выше, нейрональная перестройка моторной зоны коры способствует активации процесса реорганизации двигательного центра речи и восстановлению коркового управления периферическим речевым аппаратом для реализации речи.

Таким образом, из анализа структурно-функциональной модели ПБТС ВР, функциональной взаимосвязи компонентов системы, информационных потоков, циркулирующих внутри компонентов и между компонентами системы видно, что информационный компонент является ключевым звеном, обеспечивающим поддержку деятельности оператора по формированию единого алгоритма функционирования технической подсистемы и всей системы.

## ИНФОРМАЦИОННЫЙ КОМПОНЕНТ ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОДСИСТЕМЫ

Рассмотрим структуру, информационное наполнение и пути реализации элементов информационного компонента.

*Электронная библиотека* содержит упорядоченный фонд цифровых информационных объектов (в текстовом, графическом, видео и аудио-формате), которые несут информацию о методах технологии восстановления речи, и комплекс программных средств, реализующих функции обеспечения доступа к этому фонду, его обработки и хранения [12].

Информационно-структурная модель электронной библиотеки содержит два разнокачественных по содержанию раздела: технический и медицинский (рис. 2).



Рис. 2. Информационно-структурная модель электронной библиотеки программного модуля персонализированной биотехнической системы восстановления речи.

Модули технического раздела представляют собой электронные инструкции для ознакомления с работой аппаратов ТРЕНАР. В каждой инструкции представлена информация о назначении, технических и функциональных характеристиках аппарата, комплекте поставки, а также алгоритм подготовки аппарата к работе и алгоритмы функционирования по различным методам и программам. Алгоритмы представлены в виде пошаговой инструкции с обозначением органов управления и анимированной имитацией отклика аппарата на выполняемую последовательность операций.

Медицинский раздел представляет собой справочник по методикам наложения электродов для формирования различных движений тонкой моторики.

Каждый модуль содержит информацию о формировании одного движения: графическое и вербальное представление топологии наложения электродов; описание участвующих в формировании движения мышц, их

функции и иннервации; видео-демонстрация тренировки движения в реальных клинических условиях с аудио-комментарием.

Библиотека реализована в среде SwishMax по технологии flash-анимации — анимационного документа с расширением \*.swf, состоящего из серии кадров, объединенных в одну или несколько сцен согласно сценарию раскадровки и расстановки ключевых кадров. Переход между сценами осуществляется оператором с помощью управляющих элементов — кнопок. Написание сценариев для автоматизации операций, выполняемых в командной строке SwishMax, осуществляется с помощью ActionScript 2.0. Видео-демонстрации реализованы с помощью программного обеспечения для многорожечной записи, редактирования и монтажа видео и аудио потоков Sony Vegas 6.0.

Использование мультимедийных технологий для реализации модулей библиотеки способствует: стимулированию когнитивных аспектов обучения, таких как восприятие и осознание информации; повышению мотивации к обучению; интеграции информации за счет одновременного использования нескольких каналов восприятия; визуализации абстрактной информации за счет динамического представления процессов [13, 14].

Файлы модулей электронной библиотеки находятся в отдельной директории на сервере и доступны из программного модуля благодаря манипуляциям с каталогами и файлами DirectoryInfo и FileInfo библиотеки классов программной платформы NET.Framework. При добавлении оператором ПБТС ВР нового модуля в директорию информационный компонент распознает его расширение, полный путь к файлу и добавляет ссылку на него в список доступных модулей в интерфейсе пользователя. Таким образом, обеспечена открытая архитектура библиотеки.

*Блок поддержки принятия решений.* Вторым элементом информационного компонента, является блок поддержки принятия решений по формированию планов реабилитационного курса. Для отражения динамических аспектов поведения данного элемента и моделирования потоков управления при выполнении операций по выбору персонафицированных параметров плана реабилитационного курса разработана диаграмма функционирования блока по сценарию «Формирование плана реабилитационного курса» в нотации UML (рис. 3).

*Обмен информационными потоками* при выборе параметров плана реабилитационного курса осуществляется между оператором ИБТС ВР и сервером, на котором располагаются программные средства ППР. Оператор передает на сервер показатели нозологического статуса и запрашивает рекомендации. При запросе от оператора, управление переходит к классу *Algorithm*, реализующему алгоритм принятия решения по формированию плана реабилитации [11].

Вследствие влияния значений одних параметров курса реабилитации на другие анализ показателей нозологического статуса проводится последовательно.

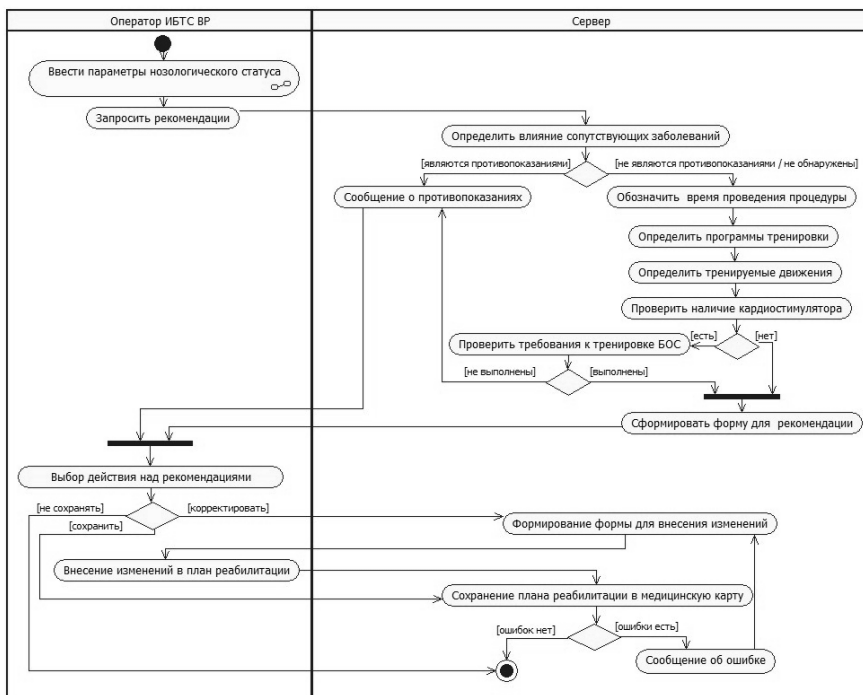


Рис. 3. Диаграмма реализации сценария «Формирование плана реабилитационного курса»

Первым определяется набор методов и программ тренировки движений кисти и пальцев, соответствующий текущему нозологическому статусу пациента, а затем определяются доступные при выбранных программах движения для тренировки. Последней операцией осуществляется проверка наличия кардиостимулятора. Отметим, что при наличии кардиостимулятора использование программной электростимуляции противопоказано. Однако, при проведении процедур тренировки движений на базе биологической обратной связи, наличие кардиостимулятора не является противопоказанием.

После анализа показателей нозологического статуса формируется пользовательское окно с рекомендациями. В рекомендации входят следующие параметры: количество процедур в одном курсе реабилитации, набор тренируемых движений, программы тренировки и длительность тренировки одного движения с разделением по дням. Параметры отображаются в виде гипертекста со ссылкой на соответствующие модули электронной библиотеки. При наличии противопоказаний к проведению процедур тренировки оператору выводится сообщение о невозможности проведения реабилитационного курса и показатели нозологического статуса, являющиеся причиной такого решения.

Далее оператору предлагаются несколько вариантов действий:

- не сохранять полученные рекомендации. В этом случае сценарий завершается и в медицинской карте пациента не происходит никаких изменений;

- сохранить рекомендации в медицинской карте пациента в качестве персонализированных параметров реабилитационного курса;

— изменить значения некоторых рекомендованных параметров и сохранить их в медицинской карте пациента в разделе «План реабилитационного курса».

На рис. 4 представлены примеры экранных форм «Параметры нозологического статуса» (1а) и «Параметры курса реабилитации» блока ППР (1б), а также фрагменты модулей электронной библиотеки: графическое представление топологии наложения электродов (2а), видео-демонстрация тренируемого движения (2б), функционирование технической подсистемы по программам «Синтез» с различными параметрами (2в, 2г). Реализация программного обеспечения блока ППР на языке С# осуществлялась в программной среде Visual Studio 2013.

База данных медицинских карт пациентов обеспечивает запись, «упорядочение» и хранение информации о пациенте [10]. В базе данных

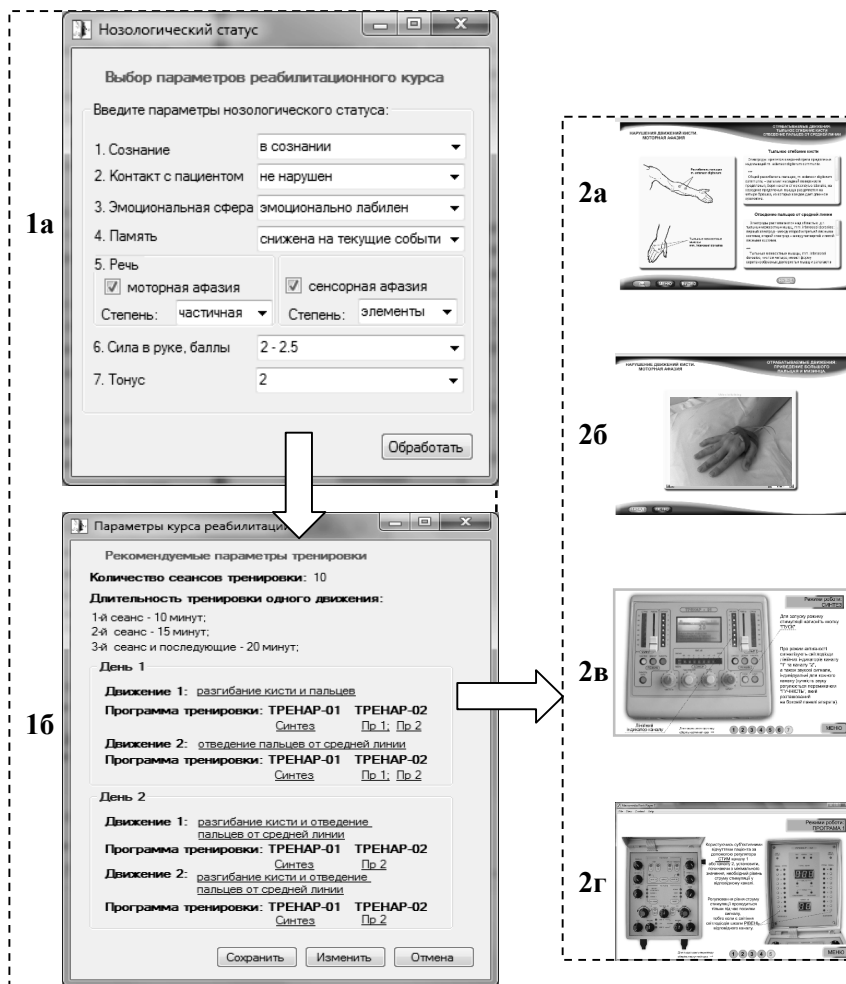


Рис. 4. Графический интерфейс блока поддержки принятия решений по выбору параметров плана реабилитации (1) и фрагменты модулей электронной библиотеки (2).

хранится информация, формализованная с помощью разработанных шаблонов. Оператор заполняет медицинскую карту пациента с помощью экранных форм (шаблонов), в редактируемые строки и поля которых вводятся числовые или текстовые данные. Последние выбираются, в основном, из списков предлагаемых значений, реже — в произвольной форме, в виде комментариев. Такой подход позволяет унифицировать протоколы ведения реабилитационных курсов по восстановлению речи, обеспечивает широкие возможности для анализа клинической информации и облегчает обмен информацией между операторами разных категорий и разных медицинских учреждений.

## **Выводы**

1. Рассмотренная ПБТС ВР реализует информационную технологию персонифицированного управления движениями кисти для восстановления речи на базе компонента технической подсистемы — аппаратно-программного комплекса ТРЕНАР, а также информационную технологию поддержки деятельности оператора при управлении этими процессами на базе информационного компонента технической подсистемы — специализированного программного модуля.

2. Рассмотренная ПБТС ВР — это интеллектуальная система, в которой поддержка деятельности оператора происходит на основе знаний о технологии восстановления речи: функционировании аппаратно-программного комплекса во всем разнообразии предоставляемых методов, программ и параметров сигналов управления; движениях кисти и пальцев рук, подлежащих тренировке; мышцах и топологии подведения управляющих сигналов к мышцам для реализации движений.

3. ПБТС ВР — это логически «мыслящая» система, в которой поддержка деятельности оператора относительно персонифицированного подхода к выбору параметров реабилитационного курса в зависимости от индивидуальных параметров нозологического статуса пациента реализуется в программном модуле на основе редуцированной консультативной экспертной системы продукционного типа, в которой использован алгоритмический подход.

4. ПБТС ВР — это обучающая система, предоставляющая оператору возможность активного самостоятельного участия в усвоении знаний, умений, приобретении практических навыков по использованию технологии восстановления речи, возможность изучать методы, программы тренировок движений и т.д., и работать с ними в интерактивном режиме. Представление информации в аудио, видео и графическом формате позволяет использовать дополнительные резервы интенсификации обучения — образное мышление. Модульная архитектура построения образовательных ресурсов, реализованных на базе электронной библиотеки, предоставляет возможность добавлять информацию по мере накопления знаний по практическому применению технологии восстановления речи.



1. Семенова К.А. Детские церебральные параличи / А.К. Семенова. — М., «Медицина», 1968. — 259 с.
2. Данилова Л.А. Методы коррекции речевого и психического развития у детей с церебральным параличом / Л.А. Данилова. — Л.: Медицина, 1977. — 95 с.
3. Мищенко Т.С. Факторы риска и клинические особенности у больных с различными подтипами ишемического инсульта / Т.С. Мищенко, Н.В. Овсянникова, В.В. Лебединец // Международный медицинский журнал. — 2011. — Т. 17, № 3. — С. 27–32.
4. Вовк М.И. Информационная технология управления движениями кисти для восстановления моторного компонента речи / М.И. Вовк, Е.Б. Галян, Е.Н. Подопратора // Кибернетика и вычислительная техника. — 2013. — Вып.174 — С. 20–30.
5. Вовк М.И. Восстановление моторного компонента речи на базе управления мышечными движениями. Теоретическое обоснование / М. Вовк, Е. Галян // Кибернетика и вычисл. техника. — 2012. — Вып.167. — С. 51–60.
6. Вовк М.І, Галян Є.Б., Подопратора О.М. Спосіб лікування мовних порушень / Патент України на корисну модель № 95347 від 25.12.14. — Бюл. №24 від 25.12.14.
7. Антомонов Ю.Г. Функциональная нагрузка человека в структуре биотехнической системы / Ю.Г. Антомонов, А.Б. Котова // Кибернетика и вычислительная техника. — 1989. — Вып. 84. — С. 66–73.
8. Гриценко В.И., Вовк М.И., Котова А.Б., Козак Л.М. Информационные технологии в биологии и медицине: проблемы, задачи, достижения / В.И. Гриценко, М.И. Вовк, А.Б. Котова, Л.М. Козак // Український журнал медичної техніки і технології. — Київ. — 1999. — № 4. — С.5–13.
9. Вовк М.И. Биоинформационная технология управления движениями человека / Вовк М.И. // Кибернетика и вычислительная техника. — 2010. — Вып. 161. — С. 42–52.
10. Галян Е.Б. Информационный компонент технологии тренировки движений кисти для восстановления речи / Е.Б. Галян // Биомедицинская инженерия и электроника. — 2014. — № 2. — Режим доступа: [www.es.rae.ru/biofbe/199-958](http://www.es.rae.ru/biofbe/199-958) (дата обращения: 18.08.2014).
11. Галян Е.Б. Алгоритм выбора параметров тренировки движений кисти для восстановления речи / Е.Б. Галян // Біологічна та медична інформатика та кібернетика для системи охорони здоров'я-2014: матеріали щорічної школи-семінару. Київ, ФМШ Жукин, 23-28 червня 2014 р. — Київ: МННЦІТіС НАНУ, 2014. — С.73–75. — Режим доступа: [http://www.irtc.org.ua/Inform/135\\_2014.pdf](http://www.irtc.org.ua/Inform/135_2014.pdf)
12. Borgman C.L., Bates M.J., Cloonan M.V., Efthimiadis E.N., GillilandSwetland A.J., Kafai Y., Leazer G.L., Maddox A. Social aspects of digital libraries. Final Report to the National Science Foundation (1996) Los-Angeles UCLA. Feb 16–17. — Режим доступа: <http://is.gseis.ucla.edu/research/dl/index.html> (дата обращения: 20.09.2014)
13. Анисимова Н.С. Теоретические основы и методология использования мультимедийных технологий в обучении: дисс. ... д-ра пед. наук: спец. 13.00.02 / Н.С. Анисимова. — СПб., 2002. — 330 с.
14. Савченко Н.А. Использование мультимедиа-технологий в общем среднем образовании / Н.А. Савченко. — М.: РУДН, 2006. — Электронная версия: <http://www.ido.rudn.ru/nfk/mult/mult4.html>

## PERSONALIZED BIOTECHNICAL SYSTEM TO RESTORE SPEECH

M.I. Vovk, Ye.B. Galyan

*International Research and Training Center for Information Technologies and Systems of National Academy of Sciences of Ukraine and Ministry of Education and Science of Ukraine*

**Introduction.** In previous studies, we proposed a new method and technology to restore speech based on biotechnical system of hand movement control. To support operator's choice of personalized control actions we had to include the information component in the technical subsystem.

**The purpose** of this research is to develop the structural and functional model of personalized biotechnical system to restore speech, to determine functionality and relationship of the system components and to describe the structure, content and functions of the information component.

**Methods.** We used information and structural modeling, structural and functional modeling, Unified Modeling Language (UML).

**Results.** In this paper we present a structural and functional model of personalized biotechnical system of hand movement control to restore speech and define structure and functionality of its components. The functional relationships between the components of the system, transformation and orderliness of information circulating within and between components are described. We paid a particular attention to the information component. It provides support for the operator activity to choice personalized parameters of rehabilitation course and gives tools for operator's learning of technology to restore speech in online and for storage of clinical information. The structure of information component, its content and the realization in PC architecture are described. Peculiarities of algorithmic and logical implementation of operations performed by informational component are represented in the activity diagram of decision support block in UML notation. Elements of information component such as electronic library, decision support block, a database of medical records are realized using software Swish Max 4.0, Sony Vegas Pro 9.0, Visual Studio 2013.

**Conclusions.** Personalized biotechnical system to restore speech under consideration is an intellectual, logical thinking, teaching system due to information component that is included into its structure.

**Keywords:** personalized biotechnical system, speech restoring, information system, hand movement control, structural and functional model, decision support block.

1. Semenova K.A. *Cerebral Palsy*. M., «Meditsina», 1968. 259 p. (in Russian).
2. Danilova L.A. *Correction methods for speech and mental development in children with cerebral palsy*, L.: «Meditsina», 1977. 95 p. (in Russian).
3. Mishchenko T.S. Risk factors and clinical features of patients with different subtypes of ischemic stroke. *International medical journal*. 2011, vol. 17, no 3, pp. 27–32. (in Russian).
4. Vovk M.I., Galyan Ye.B., Podoprigora Ye.N. Information technology for movement control of the hand used to restore the motor component of speech. *Cybernetics and Computer Engineering*, 2014, no 175, pp.20–30. (in Russian).

5. Vovk M.I., Galyan Ye.B. Restoring of motor component of speech based on muscle movement control. Theoretical grounding. *Cybernetics and Computer Engineering*, 2012, no 167, pp.51–60. (in Russian).
6. Vovk M.I., Galyan Ye.B., Podoprighora Ye.N. Method for the treatment of speech disorders / Ukraine patent for utility model № 95347. Bul. No 24. 25.12.14. (in Ukrainian).
7. Antomonov Yu. G., Kotova A. B. Functional load of human in the structure of biotechnical system. *Cybernetics and Computer Engineering*, 1989, no. 84, pp. 66–73. (in Russian).
8. Gritsenko V.I., Kotova A.B., Vovk M.I., Kozak L.M. *Information technology in biology and medicine. Lectures: Tutorial*. Kyiv: Nauk. Dumka, 2007. 381 p. (in Russian).
9. Vovk M.I. Bioinformation technology of motor control of a person. *Cybernetics and Computer Engineering*, 2010, no. 161, pp. 42–52. (in Russian).
10. Galyan Ye.B. The information component of hand movements training technology for speech restoration. *Biomedical Engineering and Electronics*, 2014, no 2. Available at: [www.es.rae.ru/biofbe/199-958](http://www.es.rae.ru/biofbe/199-958) (date: 18.08.2014) (in Russian).
11. Galyan Ye.B. Algorithm of parameter selection for hand movement training to restore speech. *Biological and Medical Informatics and Cybernetic for Health Care: materials of annual science and technology seminar PMS Zhukin*, 18–22 June 2012. K: Acad. of Sciences of Ukraine, ITRC of IT and S, 2014. — available at [http://www.irtc.org.ua/Inform/135\\_2014.pdf](http://www.irtc.org.ua/Inform/135_2014.pdf) (in Russian).
12. Borgman C.L., Bates M.J., Cloonan M.V., Efthimiadis E.N., GillilandSwetland A.J., Kafai Y., Leazer G.L., Maddox A. Social aspects of digital libraries. Final Report to the National Science Foundation (1996) Los Angeles UCLA. Feb 16–17. — available at: <http://is.gseis.ucla.edu/research/dl/index.html> (date: 20.09.2014) (in Russian).
13. Anisimova N.S. Theoretical basis and methodology of use of multimedia technology in teaching: thesis. ... Doctor of Education: speciality 13.00.02, St. Petersburg, 2002. 330 p. (in Russian).
14. Savchenko N.A. Using the multimedia technologies in general secondary education. M.: RUDN, 2006. Available at: <http://www.ido.rudn.ru/nfk/mult/mult4.html> (in Russian).

Получено 05.12.2014

## ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ ПОДХОД В ЗАДАЧАХ КООРДИНАЦИИ ДЕЙСТВИЙ С ОБМЕНОМ ИНФОРМАЦИЕЙ

С.И. Доценко

*Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко*

Для кооперативной игры с ограниченной кооперацией рассмотрено коммуникативное расширение игры путем введения нового игрока, обязанностью которого является обеспечение координации взаимодействия между агентами исходной игры. Для расширенной игры применена методика вычисления вектора Шепли. Данный метод применен к биматричной игре «координация усилий» и игровой задаче оптимального выбора.

**Ключевые слова:** кооперативная игра, коммуникативное расширение, вектор Шепли, стохастическое неравенство, задача оптимального выбора.

Для кооперативної гри з обмеженою кооперацією розглянуто комунікативне розширення гри шляхом введення нового гравця, обов'язками якого є забезпечення координації взаємодії між агентами початкової гри. Для розширеної гри розглянуто методику обчислення вектора Шеплі. Даний метод було застосовано на прикладах биматричної гри «координація зусиль» та ігрової задачі оптимального вибору.

**Ключові слова:** кооперативна гра, комунікативне розширення, вектор Шеплі, стохастична нерівність, задача оптимального вибору.

### ВВЕДЕНИЕ

Теория кооперативных игр является неотъемлемой составной частью современной экономической теории. В 2012 году ее основателю — Ллойд Шепли была присуждена Нобелевская премия по экономике. Если в первых работах по кооперативной теории игр характеристическая функция была заданной извне и неизменной, то в дальнейшем стали рассматриваться так называемые расширенные игры, в которые могут добавляться игроки, чей статус отличается от игроков исходной задачи тем, что они непосредственно не принимают участие в игре, но обеспечивают взаимодействие между ними, и, таким образом, влияют на характеристическую функцию игры, заданную на множестве исходных игроков. При этом рассматривается модель расширенной игры, а для добавленных игроков (называемых связистами или коннекторами) вычисляются компоненты вектора Шепли.

Такой подход носит название коммуникативного расширения игры.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОММУНИКАТИВНОГО РАСШИРЕНИЯ

Рассмотрим эффект расширения кооперативной игры с ограниченной кооперацией.

Пусть  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  — конечное множество, на котором задана характеристическая функция кооперативной игры. Пусть элементы множества  $N$  являются вершинами некоторого неориентированного графа  $\Gamma$ .

Предположим, что характеристическая функция  $V(S)$  обладает свойствами неотрицательности и супераддитивности, это значит, что  $(\forall S \in N)(V(S) \geq 0)$  для любых двух непересекающихся подмножеств  $S, T \in N$  справедливо неравенство  $V(S \cup T) \geq V(S) + V(T)$ , а также выполнено условие  $V(\emptyset) = 0$  (пустая коалиция ничего не зарабатывает).

Маргинальным вкладом игрока  $i$  в коалицию  $S$  (где  $i \notin S$ ) называется величина  $\text{Add}(i, S) = V(S \cup i) - V(S)$ .

Свойство характеристической функции, называемое «эффект снежного кома», состоит в том, что маргинальный вклад любого из игроков не уменьшается с ростом коалиции, или формально

$$(\forall S \subset T)(\forall i \notin T)(\text{Add}(i, S) \leq \text{Add}(i, T)).$$

Оказывается, что супераддитивность и эффект снежного кома являются равносильными свойствами (см., например [1]).

В [3], [4] была введена игра с ограниченной кооперацией на графе, и характеристическая функция игры определялась таким образом:  $W_\Gamma = (V/\Gamma)$ .

1. Если  $S$  — связное множество в  $\Gamma$ , то  $W_\Gamma(S) = V(S)$ .

2. Если множество  $S$  не связно, то  $W_\Gamma(S) = \sum V(T_k)$ , где сумма берется по компонентам связности  $S$  в графе  $\Gamma$ .

Будем называть пару  $(V, \Gamma)$  расширенной игрой с ограниченной кооперацией. В данном случае  $V$  задает максимально возможный гипотетический выигрыш коалиции  $S$  при условии, что осуществима кооперация всех ее членов. Граф  $\Gamma$  описывает реальные возможности кооперации. Поэтому  $S$  не может кооперировать всех своих участников и получать максимальный совместный выигрыш, если  $\Gamma$  не содержит необходимых для осуществления этого ребер.

Рассмотрим расширенную игру с множеством игроков  $N \cup \Gamma$ , т.е. игроками расширенной игры, наряду с элементами множества  $N$  становятся ребра из  $\Gamma$ , и допустимые коалиции данной игры имеют вид  $S \cup \Lambda$ , где  $S \subset N, \Lambda \subset \Gamma$ . Характеристическая функция такой игры определяется как  $U(S \cup \Lambda) = (V/\Lambda)(S)$ . Вектор Шепли  $\text{Sh}$  для данной характеристической функции вычисляется обычным образом, а его компоненты  $\text{Sh}_i(U), i \in N$  и  $\text{Sh}_{(i,j)}(U), (i,j) \in \Gamma$  описывают вклады игроков исходной игры, являющихся узлами графа и игроков-ребер, отвечающих за поддержание связи в максимально возможную полезность гранд-коалиции  $N \cup \Gamma$  в расширенной игре  $(V/\Gamma)(N)$ .

**Пример 1.** Пусть  $N = \{1, 2\}$ ,  $V(\{1\}) = V(\{2\}) = 1$ ,  $V(\{1, 2\}) = 4$  и пусть  $\Gamma = \{(1, 2)\}$ .

Это означает, что каждый из игроков 1 и 2 может самостоятельно заработать одну единицу. Они могут совместно заработать 4 единицы, но только лишь в том случае, если скооперируются, при отсутствии кооперации они получают лишь 2 единицы на двоих. В данном случае сеть имеет простейшую структуру и состоит только из одного ребра  $a = (1, 2)$ . Игрокам

нужно использовать это ребро, чтобы получить дополнительно две единицы. Тогда характеристическая функция расширенной кооперативной игры имеет вид

$$U(\emptyset) = U(\{a\}) = 0, \quad U(\{1\}) = U(\{2\}) = U(\{1, a\}) = U(\{2, a\}) = 1, \\ U(\{1, 2\}) = 2, \quad U(\{1, 2, a\}) = 4,$$

а вектор Шепли равен  $Sh(1) = Sh(2) = 5/3$ ,  $Sh(a) = 2/3$ .

Таким образом, владельцу ребра за установление кооперации между игроками 1 и 2 и, как следствие, увеличение их выигрыша, полагается доля в размере  $2/3$ .

Рассмотренная игра является частным случаем так называемой игры с мультилинейным расширением, введенной в [2], [3]. При этом термин «мультилинейность» означает, что характеристическая функция игры формально представима в виде полиномиальной формы, линейной по индикаторам участия всех игроков в коалиции (хотя фактически индикаторы участия в коалиции принимают всего два значения:  $-1$ , если игрок присутствует в коалиции и  $0$  в противном случае).

Оуэном было доказано, что для любой характеристической функции игры существует ее единственное мультилинейное расширение, заданное внутри единичного  $n$ -мерного куба  $[0, 1]^n$ , представимое в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{S \subset N} \left\{ \prod_{j \in S} x_j \prod_{j \notin S} (1 - x_j) \right\} V(S). \quad (1)$$

Если рассмотреть множество вершин  $\alpha^S \in \{0, 1\}^n$  заданного  $n$ -мерного куба  $[0, 1]^n$ , представляющих собой  $n$ -мерные вектора с компонентами  $0$  либо  $1$ , и задать взаимно-однозначное соответствие между вершинами и коалициями  $S$ , так что  $\alpha_i^S = \chi(i \in S)$ , то окажется, что значение (1), вычисленное в вершинах, совпадает с соответствующими значениями характеристической функции игры  $V(S)$ , т. е.  $f(\alpha_i^S) = V(S)$ .

Для рассмотренного примера характеристическая функция представима в виде

$$F(q_1, q_2, q_a) = q_1 + q_2 + 2q_1q_2q_a. \quad (2)$$

Для мультилинейной характеристической функции стандартным приемом нахождения вектора Шепли является нахождение ее частных производных по соответствующим аргументам, а затем их интегрирование вдоль диагонали единичного куба.

В данном случае

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial q_1} = 1 + 2q_2q_a, \quad F_2 = \frac{\partial F}{\partial q_2} = 1 + 2q_1q_a, \quad F_a = \frac{\partial F}{\partial q_a} = 2q_1q_2, \quad (3)$$

отсюда

$$\text{Sh}(1) = \int_0^1 F_1(t, t, t) dt = \int_0^1 (1 + 2t^2) dt = 5/3,$$

$\text{Sh}(2) = 5/3$  (вычисляется аналогично), и, наконец,

$$\text{Sh}(a) = \int_0^1 F_a(t, t, t) dt = \int_0^1 2t^2 dt = 2/3.$$

Одна из трактовок вектора Шепли, данных самим Ллойдом Шепли в [5] имеет такую вероятностную интерпретацию. Пусть задана характеристическая функция кооперативной игры, и пусть игроки присоединяются по одному случайным образом к гранд-коалиции так, что все перестановки, описывающие присоединение игроков, равновероятны. Тогда компонента вектора Шепли каждого из игроков равна математическому ожиданию его вклада в гранд-коалицию.

Такую равновероятность всех перестановок можно получить, предположив, что игроки присоединяются к гранд-коалиции в случайные моменты времени согласно заданной функции распределения, одинаковой для всех игроков. Вид функции распределения не имеет принципиального значения, единственным требованием является ее непрерывность для того, чтобы вероятность одновременного присоединения каких-либо двух игроков была бы равна нулю. Наиболее удобно с вычислительной точки зрения в данном случае использовать равномерное распределение.

Однако, возможно рассмотреть обобщение концепции вектора Шепли на случай, когда не обязательно все перестановки игроков равновероятны.

Предположим, что игроки присоединяются к коалиции во временном интервале  $[0, 1]$ . Пусть время прибытия  $i$ -го игрока задается функцией распределения  $G_i(t), i = \overline{1, n}$ , и для всех  $i$   $G_i(0) = 0, G_i(1) = 1$ , где  $G_i(t)$  — непрерывные функции на интервале  $[0, 1]$ . В этом случае математическое ожидание маргинального вклада  $i$ -го игрока в гранд-коалицию (а следовательно, его компонента в обобщенном векторе Шепли) описывается интегралом

$$Z_i = \int_0^1 F_i(G_1(t), \dots, G_n(t)) dG_i(t). \quad (4)$$

Покажем, как работает данная формула для ранее рассмотренного примера 1. Пусть по-прежнему  $N = \{1, 2\}$ ,  $V(\{1\}) = V(\{2\}) = 1$ ,  $V(\{1, 2\}) = 4$ ,  $\Gamma = \{(1, 2)\}$ . Пусть моменты прихода обоих игроков независимы и имеют одинаковую функцию распределения  $G_1(t) = G_2(t) = t$ , а момент прихода ребра, обеспечивающего связь между ними, имеет вид  $G_a(t) = 2t - t^2$ .

Тогда подынтегральные функции в формуле (3) имеют вид

$$F_1(G_1(t), G_2(t), G_a(t)) = F_2(G_1(t), G_2(t), G_a(t)) = 1 + 2t(2t - t^2) = 1 + 4t^2 - 2t^3,$$

$$F_a(G_1(t), G_2(t), G_a(t)) = 2t^2,$$

а искомые компоненты обобщенного вектора Шепли  $(Z_1, Z_2, Z_a)$  равны:

$$Z_1 = Z_2 = \int_0^1 F_1(G_1(t), G_2(t), G_a(t)) dt = \frac{11}{6},$$

$$Z_a = \int_0^1 F_a(G_1(t), G_2(t), G_a(t)) dG_a(t) = \frac{1}{3}.$$

Если же положить, что  $G_a(t) = t^2$ , полагая  $G_1(t)$  и  $G_2(t)$  неизменными, то подынтегральные функции в (3) приобретают вид

$$F_1(G_1(t), G_2(t), G_a(t)) = F_2(G_1(t), G_2(t), G_a(t)) = 1 + 2t^3,$$

$$F_a(G_1(t), G_2(t), G_a(t)) = 2t^2,$$

тогда  $Z_1 = Z_2 = \frac{3}{2}$ ,  $Z_a = 1$ .

Легко видеть, что по сравнению с классическим вектором Шепли компонента обобщенного вектора, соответствующая ребру графа, в первом случае уменьшилась, а во втором возросла. Заметим, что при этом функция распределения времени прихода ребра  $G_a(t) = t$  в первом случае заменялась на  $G_a(t) = 2t - t^2$ , а во втором — на  $G_a(t) = t^2$ , что соответствует «стохастически меньшей» и «стохастически большей» случайным величинам, соответственно.

Покажем, что такая тенденция не случайна. Для этого сформулируем и докажем теорему о связи компонент обобщенного вектора Шепли и функциями распределения моментов присоединения игроков. Но предварительно напомним определения и основные свойства стохастических неравенств.

**Определение 1.** Известно, что случайная величина  $\xi_1$  стохастически меньше величины  $\xi_2$  (и это обозначается  $\xi_1 \leq^{st} \xi_2$ ), если эти величины можно задать на одном вероятностном пространстве так, чтобы  $\xi_1(\omega) \leq \xi_2(\omega)$  почти для всех  $\omega \in \Omega$  (т. е. за исключением, может быть, множества  $\omega$  меры ноль).

**Свойство 1.** Утверждение  $\xi_1 \leq^{st} \xi_2$  равносильно утверждению, что для соответствующих функций распределения справедливо неравенство  $(\forall x) (F_1(x) \geq F_2(x))$ .

**Свойство 2.** Утверждение  $\xi_1 \leq^{st} \xi_2$  равносильно утверждению, что для любой неубывающей функции  $g(x): R \rightarrow R$  справедливо неравенство  $M(g(\xi_1)) \leq M(g(\xi_2))$ . В частности, из соотношения  $\xi_1 \leq^{st} \xi_2$  следует  $M(\xi_1) \leq M(\xi_2)$ .



**Свойство 3.** Отношение «стохастически меньше», заданное на множестве случайных величин, является отношением частичного порядка (т. е. обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности).

**Теорема.** Пусть задана кооперативная игра  $n$  игроков с супераддитивной характеристической функцией. Пусть  $\tau_i, i = \overline{1, n}$  — случайные попарно независимые моменты присоединения игроков к гранд-коалиции с заданными (непрерывными) функциями распределения  $F_i(t)$ . Если заменить момент прихода  $k$ -го игрока  $\tau_k$  на другой момент  $\tau'_k$ , «стохастически больший» (так что  $\tau_k \stackrel{st}{\leq} \tau'_k$ ), то компонента обобщенного вектора Шепли  $k$ -го игрока не уменьшится.

**Доказательство.** Зададим  $\tau_k$  и  $\tau'_k$  на одном вероятностном пространстве так, чтобы любая реализация  $\tau'_k$  была бы не меньшей соответствующей реализации  $\tau_k$ . Разыграем  $\tau_k$  и  $\tau'_k$  так, что для реализаций этих величин справедливо неравенство  $t_k \leq t'_k$  с вероятностью 1. И разыграем моменты присоединения к гранд-коалиции всех остальных игроков  $\tau_i, i \neq k$ .

Обозначим через  $S$  и  $S'$  множества индексов игроков, лежащих левее  $t_k$  и  $t'_k$  соответственно. Тогда очевидно, что для данной (равно как и для любой другой) реализации набора величин  $\tau_i$  справедливо теоретико-множественное включение  $S \subset S'$ . В силу предположения, характеристическая функция супераддитивна, следовательно, обладает эффектом снежного кома. Отсюда  $Add(k, S) \leq Add(k, S')$ . Но соответствующая компонента вектора Шепли равна интегралу от маргинального вклада по всем возможным исходам, отсюда

$$\left( Sh(k) = \int_{\omega \in \Omega} Add(k, S) \right) \leq \left( Sh(k') = \int_{\omega \in \Omega} Add(k, S') \right).$$

Рассмотрим пример, который показывает, как ввиду разных распределений моментов присоединения игроков лидер и аутсайдер игры могут меняться местами.

Пусть в кооперативной игре принимают участие три игрока под порядковыми номерами 1, 2, 3 и этим игрокам присвоены индексы 5, 6 и 7 соответственно. Пусть характеристическая функция определяется как квадрат суммы индексов игроков, входящих в коалицию. Такая характеристическая функция супераддитивна (поскольку для любых двух положительных чисел квадрат суммы больше, чем сумма квадратов).

Найдем все возможные маргинальные вклады игроков и занесем их в таблицу 1 (например,  $Add(1, \{2, 3\}) = (5 + 6 + 7)^2 - (6 + 7)^2 = 155$ ).

Таблица 1.

Возможные маргинальные вклады игроков

| Игроки | Коалиции |     |     |     |       |       |       |
|--------|----------|-----|-----|-----|-------|-------|-------|
|        | $\phi$   | 1   | 2   | 3   | {1,2} | {1,3} | {2,3} |
| 1      | 25       | –   | 85  | 95  | –     | –     | 155   |
| 2      | 36       | 96  | –   | 120 | –     | 180   | –     |
| 3      | 49       | 119 | 133 | –   | 203   | –     | –     |

В классическом случае, когда все перестановки игроков равновероятны, компонента вектора Шепли для первого игрока может быть выражена через маргинальные вклады следующим образом:

$$Sh(1) = \frac{1}{6} (2 \cdot Add(1, \phi) + Add(1, \{2\}) + Add(1, \{3\}) + 2 \cdot Add(1, \{2,3\})). \quad (5)$$

Формулы для вычисления компонент вектора Шепли для двух других игроков получаются из (5) циклической перестановкой номеров.

Вектор Шепли, вычисленный по формуле (5) и данным таблицы 1, имеет вид:  $Sh = (90, 108, 126)$ .

Пусть теперь моменты прихода игроков имеют разное распределение, например:  $G_1(t) = t^2, G_2(t) = t, G_3(t) = 2t - t^2$ . Заметим, что на интервале  $[0, 1]$  справедливо неравенство  $G_1(t) \leq G_2(t) \leq G_3(t)$ , это означает, что для соответствующих случайных величин справедливо двойное неравенство с обратным знаком:  $\tau_1 \stackrel{st}{\geq} \tau_2 \stackrel{st}{\geq} \tau_3$ .

В общем случае вычисление вероятностей реализации перестановок приводит к громоздким формулам вычислений кратных интегралов. Однако, для случая трех игроков можно использовать формулу, содержащую лишь простой интеграл. Вероятность реализации перестановки  $(i_1, i_2, i_3)$  равна

$$p(i_1, i_2, i_3) = \int_0^1 G_{i1}(t)(1 - G_{i3}(t))dG_{i2}(t). \quad (6)$$

Вероятности реализации перестановок, вычисленные по формуле (6), приведены в таблице 2.

Обобщение (5) на случай неравновероятных перестановок имеет вид:

$$Sh(1) = \frac{1}{6} ((p(1,2,3) + p(1,3,2)) \cdot Add(1, \phi) + p(2,1,3)Add(1, \{2\}) + p(3,1,2)Add(1, \{3\})) + (p(2,3,1) + p(3,2,1))Add(1, \{2,3\}), \quad (7)$$

а обобщенный вектор Шепли, вычисленный на основании (7), равен  $Sh = \left( \frac{370}{3}, 112, \frac{266}{3} \right)$ . Таким образом, лидер и аутсайдер поменялись местами.

**Таблица 2.**

*Вероятности реализации вычисленных перестановок*

|                     |         |         |         |         |         |         |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| <b>Перестановка</b> | (1,2,3) | (1,3,2) | (2,1,3) | (2,3,1) | (3,1,2) | (3,2,1) |
| <b>Вероятность</b>  | 1/30    | 2/30    | 2/30    | 7/30    | 7/30    | 11/30   |

**Целью** данной статьи является построение иллюстративных примеров, демонстрирующих эффективность метода коммуникативного расширения. Данный метод применяется для двух моделей — координации усилий и задачи оптимального выбора. Основным математическим аппаратом является классическая теория кооперативных игр, с которой можно ознакомиться в [6].

**КОММУНИКАТИВНОЕ РАСШИРЕНИЕ ИГРЫ «КООРДИНАЦИЯ УСИЛИЙ»**

Классическая игра «координация усилий» является простым примером, приводимым в ряде учебников по теории игр как иллюстрация того, что биматричная игра может иметь несколько равновесий по Нэшу с различными выплатами игрокам. Пусть каждый из двух игроков имеет две стратегии — не работать (1) или работать (2). В случае выбора стратегии «работать» затраты труда оцениваются в 1. Если другой игрок также выбирает стратегию «работать», то их совместные усилия приносят каждому по 2 единицы, и таким образом, прибыль каждого составляет 1 единицу. Если же один из игроков выбирает стратегию «работать», а второй — «не работать», то первый проигрывает 1. Тот, кто выбирает стратегию «не работать» ничего не выигрывает и не проигрывает. Таким образом, данная биматричная игра имеет матрицу выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} (0, 0) & (0, -1) \\ (-1, 0) & (1, 1) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, данная игра имеет две точки равновесия (1,1) и (2,2), причем ситуация (2,2) является более выгодной обоим игрокам.

Предположим теперь, что игроки оказываются работоспособными с вероятностями  $p_1, p_2$ , соответственно, и неработоспособными с дополнительными вероятностями. Работоспособный игрок может выбирать любую из двух стратегий, а неработоспособный — только «не работать».

В данной игре у каждого из игроков по-прежнему существует две стратегии — работать или не работать, находясь в работоспособном состоянии. Тогда данная игра имеет платежную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} (0, 0) & (0, -p_2) \\ (-p_1, 0) & (p_1(2p_2 - 1), p_2(2p_1 - 1)) \end{pmatrix}.$$

При  $p_1 > \frac{1}{2}, p_2 > \frac{1}{2}$  ситуация («работать» — «работать») является точкой равновесия по Нэшу, которая доминирует по Парето ситуацию («не работать» — «не работать»).

Предположим теперь, что у каждого из игроков появилась возможность узнавать о состоянии партнера. Тогда, очевидно, оптимальной стратегией каждого из игроков является «работать», если партнер работоспособен, и «не работать» — в противном случае. При этом ожидаемая величина выигрыша каждого составляет  $p_1 p_2$ .

Пусть двусторонняя связь между партнерами обеспечивается третьим лицом (связистом), который до принятия решения игроками может с вероятностью  $p_3$  обеспечить им двустороннюю связь и они, таким образом, узнают о состоянии друг друга. Однако, связист желает получить некоторую плату за дополнительную выгоду, возникающую вследствие предоставленных им услуг.

Тогда характеристическая функция такой игры имеет вид:

$$V(1) = p_1(2p_2 - 1), \quad V(2) = p_2(2p_1 - 1), \quad V(c) = 0,$$

$$V(1,2) = V(1) + V(2) = 4p_1 p_2 - p_1 - p_2,$$

$$V(1,c) = V(1) = p_1(2p_2 - 1), \quad V(2,c) = V(2) = p_2(2p_1 - 1),$$

$$V(1,2,c) = 2p_1 p_2 p_3 + (4p_1 p_2 - p_1 - p_2)(1 - p_3).$$

Перейдем к приведенной игре с характеристической функцией  $W(S) = V(S) - \sum_{i \in S} V(i)$ , тогда  $W(1,2,c) = p_3(p_1 + p_2 - 2p_1 p_2)$ , а для всех остальных коалиций значение  $W$  равно нулю. В этом случае вектор Шепли равен

$$\begin{aligned} & (V(1) + W(1,2,c)/3, V(2) + W(1,2,c)/3, V(1,2,c)/3) = \\ & = (p_1(2p_2 - 1) + p_3(p_1 + p_2 - 2p_1 p_2)/3, p_2(2p_1 - 1) + \\ & \quad + p_3(p_1 + p_2 - 2p_1 p_2)/3, p_3(p_1 + p_2 - 2p_1 p_2)/3). \end{aligned}$$

При  $p_1 \leq \frac{1}{2}$  либо  $p_2 \leq \frac{1}{2}$  ситуация «не работать» — «не работать» в условиях неинформированности является единственным равновесием по Нэшу, значение характеристической функции от гранд-коалиции составляет  $V(1,2,c) = 2p_1 p_2 p_3$ , для всех остальных коалиций она равна нулю, и следовательно, вектор Шепли равен  $\left( \frac{2}{3} p_1 p_2 p_3, \frac{2}{3} p_1 p_2 p_3, \frac{2}{3} p_1 p_2 p_3 \right)$ .

## КОММУНИКАТИВНАЯ ИГРА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА

Рассмотрим кооперативную коммуникативную игру в задаче оптимального выбора, в которой принимают участие два игрока и третье лицо, обеспечивающее обмен информацией между ними (связист).

Вначале приведем основные результаты по классической задаче оптимального выбора с одним участником (или задаче секретаря). Пусть некто в случайном порядке знакомится с  $n$  объектами и хочет выбрать среди них

наилучший. При этом после ознакомления с очередным объектом нужно либо остановить на нем свой выбор, либо отвергнуть его; возвращаться к ранее просмотренным объектам нельзя. Объекты являются упорядоченными определенным образом по качеству, т. е. качества любых двух объектов сравнимы между собой. «Ознакомление в случайном порядке» означает, что изначально все  $n!$  перестановок, задающих порядок просмотра объектов, равновероятны.

Объект, наилучший среди всех  $n$ , в дальнейшем будем называть *наилучшим*, а объект, лучший среди  $k$  просмотренных, — *максимальным*. Очевидно, что в ходе просмотра следует анализировать целесообразность остановки выбора на некотором объекте, только если он является максимальным. При этом оказывается, что первый объект является максимальным и индексы максимальных объектов образуют цепь Маркова с переходными вероятностями  $p(k, j) = \frac{k}{j(j-1)}$ ,  $j > k$ . Более того, независимо от того, был ли  $k$ -й элемент максимальным или нет, вероятность того, что среди элементов с индексами  $k+1, \dots, n$  минимальный индекс максимального элемента будет  $j$ , равна  $\frac{k}{j(j-1)}$ ,  $j > k$  и с вероятностью  $\frac{k}{n}$  в последовательности  $k+1, \dots, n$  не встретится ни одного максимального элемента.

Доказано, что для того, чтобы выбрать наилучший объект из  $n$ , нужно придерживаться такой стратегии: вначале пропустить все элементы с индексами  $1, \dots, k^* - 1$  и затем остановить свой выбор на первом максимальном элементе, индекс которого не меньше  $k^*$ , где  $k^*$  определяется из двойного неравенства

$$\frac{1}{k^*} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 1 < \frac{1}{k^*-1} + \dots + \frac{1}{n-1}. \quad (8)$$

Оказывается, что при  $n \rightarrow \infty$   $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$ , а вероятность выбора наилучшего объекта при соблюдении описанной стратегии стремится к  $1/e$ . Множество индексов, на которых возможна остановка, будем обозначать  $\Gamma^* = \{k^*, \dots, n\}$  и называть опорным множеством.

Перейдем непосредственно к постановке игровой задачи. Пусть в игре принимают участие два игрока, и каждый осуществляет выбор наилучшего элемента из одного множества, и пусть второму игроку разрешено осуществлять свой поиск лишь после того, как первый игрок уже закончил просмотр и остановился на некотором максимальном элементе, в противном случае выигрыш второго игрока полагается равным нулю.

Пусть  $n$  — количество объектов, из которых игроки производят выбор. Предположим, что  $n$  — достаточно большое число и возникающие в последующих рассуждениях суммы можно заменять их предельными значениями.

Предположим, что первый и второй игроки придерживаются таких пороговых стратегий — пропустить  $k_1$  и  $k_2$  элементов соответственно и остановиться на первом максимальном элементе. Обозначим  $\frac{k_1}{n} = x, \frac{k_2}{n} = y$ .

Тогда выигрыш первого игрока равен

$$\sum_{j=k_1+1}^n \frac{k_1}{j(j-1)} \frac{j}{n} = \frac{k_1}{n} \sum_{j=k_1+1}^n \frac{1}{j-1} \sim x \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -x \ln(x).$$

Чтобы найти выигрыш второго игрока, нужно, согласно формуле полной вероятности, просуммировать по  $j$  от  $k_2+1$  до  $n$  произведение трех вероятностей — вероятности того, что в последовательности  $k_2+1, \dots, n$   $j$ -й элемент окажется первым из максимальных (эта вероятность равна  $\frac{k_2}{j(j-1)}$ ); вероятности того, что  $j$ -й элемент окажется наилучшим и является максимальным (эта вероятность равна  $\frac{j}{n}$ ) и вероятности того, что первый игрок, начав свой просмотр с элемента  $k_1+1$ , остановился на некотором максимальном элементе с индексом меньшим, чем  $j$  (эта вероятность равна  $\sum_{i=k_1+1}^{j-1} \frac{k_1}{i(i-1)}$ ).

Таким образом, искомая величина равна

$$\begin{aligned} \sum_{j=k_2+1}^n \frac{k_2}{j(j-1)} \frac{j}{n} \cdot \sum_{i=k_1+1}^{j-1} \frac{k_1}{i(i-1)} &= \frac{k_2}{n} \sum_{j=k_2+1}^n \frac{1}{j-1} \left[ k_1 \left( \frac{1}{k_1} - \frac{1}{j-1} \right) \right] = \\ &= \frac{k_2}{n} \sum_{j=k_2+1}^n \frac{1}{j-1} \left( 1 - \frac{k_1}{j-1} \right) = \\ &= \frac{k_2}{n} \sum_{j=k_2+1}^n \frac{1}{j-1} - \frac{k_1 k_2}{n} \sum_{j=k_2+1}^n \frac{1}{(j-1)^2} \sim -y \ln(y) - xy \int_y^1 \frac{1}{t^2} dt = -y \ln(y) - x(1-y). \end{aligned}$$

Переходя к непрерывным функциям выигрыша, имеем:

$$F_1(x, y) = -x \ln(x); \quad F_2(x, y) = -y \ln(y) - x(1-y).$$

Предположим, что игроки действуют независимо друг от друга, каждый в собственных интересах и нет информированности о действиях друг друга (в данном случае это означает, что второй игрок не знает момента остановки первого). При данном сценарии первый игрок минимизирует функцию  $F_1(x, y)$  по  $x$ , поскольку она не зависит от  $y$ :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\ln(x) - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{e} \approx 0.368.$$

Подставляя полученное значение  $x = x_0$  в  $F_2(x, y)$  и дифференцируя полученное выражение по  $y$ , имеем:

$$\frac{\partial F_2(x_0, y)}{\partial y} = -\ln(y) - 1 + \frac{1}{e} = 0 \Rightarrow y_0 = e^{-1+1/e} \approx 0.531.$$

Тогда, выигрыш игроков, действующих изолированно и в условиях отсутствия информации о моменте остановки, составляет

$$V(1) = F_1(x_0) = 1/e \approx 0.368, \quad V(2) = F_2(x_0, y_0) = e^{-1+1/e} - e^{-1} \approx 0.164.$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда игроки объединяются в коалицию с целью максимизации суммарного выигрыша, но по прежнему отсутствует информация о моменте остановки первого игрока. Обозначим суммарный выигрыш первого и второго игроков через  $F_{12}(x, y)$ , тогда

$$F_{12}(x, y) = F_1(x, y) + F_2(x, y) = -x \ln(x) - y \ln(y) - x(1 - y).$$

Для того, чтобы найти точку максимума функции  $F_{12}(x, y)$ , найдем частные производные  $F_{12}(x, y)$  по  $x$  и по  $y$  и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial F_{12}(x, y)}{\partial x} = -\ln(x) - 1 - y = 0, \quad \frac{\partial F_{12}(x, y)}{\partial y} = -\ln(y) - 1 + x = 0,$$

что приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} x = \ln(y) + 1 \\ x = e^{-2+y} \end{cases}.$$

Численное решение данной системы имеет вид:

$$x_1 \approx 0.213, \quad y_1 \approx 0.455, \quad F_{12}(x_1, y_1) \approx 0.572.$$

Простая проверка показывает, что найденная стационарная точка функции  $F_{12}(x, y)$  удовлетворяет достаточным условиям существования экстремума и при этом является точкой максимума.

Заметим, что найденные значения  $x_1$  и  $y_1$  меньше, чем  $x_0$  и  $y_0$ , соответственно. Качественно это означает, что первый игрок сдвигает свое пороговое значение влево для того, чтобы уступить пространство второму игроку и повысить его возможности для просмотра. Второй игрок использует предоставленную ему возможность и также сдвигает свое пороговое значение влево.

Для сравнения,  $F_1(x_0) + F_2(x_0, y_0) \approx 0.368 + 0.164 \approx 0.532$  и, таким образом, цена анархии данной игры составляет  $0.572/0.532 \approx 1.075$ .

Предположим, что в игру включается третий игрок, называемый связистом, который может сообщить второму игроку о моменте остановки первого игрока. Это не повлияет на выигрыш первого игрока. Найдем выигрыш второго игрока при такой дополнительной информации.

Если  $x \geq 1/e$ , то второй игрок начинает просмотр непосредственно после окончания просмотра первым, и, таким образом, выигрыш второго игрока составляет

$$F_{2*}(x) = \sum_{k=k_1}^n \frac{k_1}{i(i-1)} \cdot \sum_{j=i+1}^n \frac{i}{j(j-1)} \frac{j}{n} = \\ = \frac{k_1}{n} \sum_{i=k_1}^n \frac{1}{i-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{j-1} \sim x \int_{t=x}^1 \frac{1}{t} \int_{u=t}^1 \frac{1}{u} du dt = \frac{x \ln^2(x)}{2}.$$

Если  $x \leq 1/e$ , то второй игрок начнет свой просмотр, начиная с элемента  $n/e$ . Если первый игрок закончит просмотр раньше, чем на элементе  $n/e$  (вероятность такого события составляет  $(1-ex)$ ), и его выигрыш составит  $1/e$ . Если же первый игрок закончит просмотр на элементе  $n/e$  или позже (вероятность такого события составляет  $ex$ ), то второй игрок начнет просмотр на элементе, непосредственно следующем за тем, на котором остановил просмотр 1-й игрок, и условное математическое ожидание выигрыша в этом случае составит  $F_{2*}\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e}$ , тогда, согласно формуле полной вероятности,

$$F_{2*}(x) = (1-ex)\frac{1}{e} + ex\frac{1}{2e} = \frac{1}{e} - \frac{x}{2}.$$

Таким образом,

$$F_{2*}(x) = \begin{cases} \frac{1}{e} - \frac{x}{2}, & x \leq \frac{1}{e} \\ \frac{x \ln^2(x)}{2}, & x \geq \frac{1}{e} \end{cases}.$$

При  $x \leq 1/e$  совместный выигрыш первого и второго игроков составляет

$$F_{12*}(x) = F_1(x) + F_{2*}(x) = -x \ln(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{e}.$$

Найдем точку максимума  $F_{12*}(x)$ . Из условия  $\frac{dF_{12*}(x)}{dx} = 0$  имеем:

$\ln(x) = -3/2$ , отсюда  $x_2 = e^{-3/2}$ , что соответствует условию  $x \leq 1/e$ ,

$$F_{12*}(e^{-3/2}) = e^{-1} + e^{-3/2} \approx 0.591.$$

При  $x \geq 1/e$  совместный выигрыш первого и второго игроков составляет

$$F_{12*}(x) = F_1(x) + F_{2*}(x) = -x \ln(x) + \frac{x \ln^2(x)}{2}.$$

В этом выражении оба слагаемых являются монотонно убывающими функциями на интервале  $[1/e, 1]$ ,  $F_{12*}(1/e) = 1.5e^{-1} \approx 0.552 < F_{12*}(e^{-3/2})$ .

Таким образом, функция  $F_{12*}(x)$  достигает максимума при  $x = e^{-3/2}$  и равна  $e^{-1} + e^{-3/2} \approx 0.591$ .



Если же игроки действуют каждый в своих интересах, но второй игрок информирован о моменте остановки первого игрока, то их выигрыши составят  $V(1) = F_1(1/e) = 1/e$ ,  $V(2) = 0.164$  и, таким образом, цена анархии составит  $\frac{0.591}{0.368 + 0.164} = 1.071$ .

Вычисление вектора Шепли для данной кооперативной игры представлено в таблице 3.

**Таблица 3.**

*Вычисленные вектора Шепли для рассмотренной кооперативной игры*

| Перестановки | Игроки |       |       |
|--------------|--------|-------|-------|
|              | 1      | 2     | С     |
| 1,2,с        | 0.368  | 0.204 | 0.019 |
| 2,1,с        | 0.408  | 0.164 | 0.019 |
| 1,с,2        | 0.368  | 0.223 | 0     |
| 2,с,1        | 0.407  | 0.164 | 0.020 |
| с,1,2        | 0.368  | 0.223 | 0     |
| с,2,1        | 0.407  | 0.184 | 0     |
| Shapley      | 0.388  | 0.194 | 0.010 |

Таким образом, характеристическая функция кооперативной игры с двумя игроками и связистом при наличии трансферабельной полезности имеет вид:

$$V(1) = 1/e \approx 0.368, \quad V(2) \approx 0.164, \quad V(c) = 0,$$

$$V(1,2) \approx 0.572, \quad V(1,c) = V(1) \approx 0.368, \quad V(2,c) = \frac{1}{2e} \approx 0.184,$$

$$V(1,2,c) = e^{-1} + e^{-3/2} \approx 0.591.$$

Рассмотренный во введении метод построения линейного расширения кооперативной игры позволяет вычислять вектор Шепли для задач большей размерности и более сложной структуры, чем приведенные в статье примеры.

## Выводы

Рассмотренные примеры наглядно демонстрирует эффект повышения выигрышей игроков за счет введения дополнительного агента, обеспечивающего взаимодействие между ними и называемого связистом. Компонента вектора Шепли связиста характеризует его вознаграждение за обеспечение связи между игроками (в рассмотренных примерах она незначительна).

1. Tijs S. Introduction to game theory / S. Tijs // Hindustan book agency. — 2003.
2. Owen G. Multilinear Extensions of Games / G. Owen // Management Science. — 1972. — P. 64–79.
3. Owen G. Values of Graph-Restricted Games / G. Owen // SIAM J Alg. Disc. Math. — 1986. — P. 210–220.
4. Myerson R. Graphs and Cooperation in Games / R. Myerson // Math. Op. Res. — 1977. — P. 225–229.

5. Shapley L. A value for n-person games / L. Shapley // Contributions to the Theory of Games. — Princeton University Press. — 1953.— P. 307–317.
6. Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения / В.В. Мазалов // Спб.: Изд-во «Лань», 2010. — 446 с.

UDC 681.5

## ON GAME-THEORETICAL APPROACH IN ACTION COORDINATION PROBLEMS WITH INFORMATION EXCHANGE

S.I. Dotsenko

*Taras Shevchenko National University of Kyiv*

**Introduction.** Cooperative game theory is integral part of modern economics. The founder of this theory is Lloyd Shapley, who became Nobel prize winner in economics in 2012. In classical cooperative game theory the characteristic function of the game is rigidly defined and remains unchanged. The further research are aimed at so-called extended games, when the extra players may be induced into the game. The extra players don't participate in the game immediately, but they provide the connection between the origin players and so, may change the characteristic function of the game. For the extended game the Shapley values are calculated for origin and extra players equally well.

**Results.** The Shapley values for extended communication games, based on both forces, coordination game and secretary problem are obtained in explicit form. As accessory result, the theorem on stochastic inequality for Shapley values in the case of player's non-uniform joining times to coalition is proved and then illustrated by vivid example.

**Conclusions.** The considered examples vividly illustrate winnings increment effect, stipulated by extra agent induction. This agent is aimed to provide the connection between the other players and is called a connector. Connector's Shapley value characterizes his fair salary for connection provision. A linear extension function's method provides the analysis of Shapley value calculation for problems of more sophisticated structure, than delivered above.

**Keywords:** cooperative game, communicative extension, Shapley value, stochastic inequality, optimal choice problem.

1. Tijs S. *Introduction to game theory*. Hindustan book agency. 2003.
2. Owen G. *Multilinear Extensions of Games*. Management Science. 1972, pp. 64–79.
3. Owen G. Values of Graph-Restricted Games. *SIAM J Alg. Disc. Math.* 1986, pp. 210–220.
4. Myerson R. *Graphs and Cooperation in Games*. Math. Op. Res. 1977, pp. 225–229.
5. Shapley L. *A value for n-person games*. *Contributions to the Theory of Games*. Princeton University Press. 1953, pp. 307–317.
6. Mazalov V.V. *Mathematical game theory and it's applications*. Saint Petersburg, «Lan» 2010, 446 p. (in Russian).

Получено 30.09.2014

# Интеллектуальное управление и системы

УДК 519.6

## ON THE APPROXIMATION OF VECTOR OPTIMIZATION PROBLEMS

**B.V. Norkin**

*V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine*

В работе исследуются условия сходимости приближенного метода решения задач многокритериальной оптимизации, когда целевые функции и допустимое множество заменяются их приближениями. Доказано, что достаточным условием сходимости являются равномерная сходимость приближенных функций к исходной функции и сходимость допустимого множества приближенных задач к допустимому множеству исходной задачи, по крайней мере, в окрестности решения.

**Ключевые слова:** векторная оптимизация, стохастическая многокритериальная оптимизация, парето-оптимальность, дискретная аппроксимация, эpsilon-доминирование.

У роботі досліджено умови збіжності наближеного методу розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації у випадку коли цільові функції і допустима область замінюються їх наближеннями. Доведено, що достатньою умовою збіжності є рівномірна збіжність наближених функцій до початкової функції та збіжність допустимої множини наближених задач до допустимої множини початкової задачі хоча б в околі розв'язку.

**Ключові слова:** векторна оптимізація, стохастична багатокритеріальна оптимізація, парето-оптимальність, дискретна аппроксимация, епсилон-домінування.

## INTRODUCTION

This paper studies conditions of convergence of the successive approximations method for solving deterministic and stochastic vector optimization problems. A general form of a vector optimization problem reads as follows:

$$\bar{F}(x) = \{F_1(x), \dots, F_m(x)\} \rightarrow \max_{x \in X \subset \mathbb{R}^n}, \quad (1)$$

where functions  $F_i(x)$ ,  $i=1, \dots, m$ , are continuous on a compact set  $X \subset \mathbb{R}^n$ . The problem is (a) to find individual elements or (b) the whole set of weakly Pareto optimal points  $X^* \subset X$  such that for any  $x \in X^*$  there is no  $x' \in X$  and  $\bar{F}(x') > \bar{F}(x)$  (component-wise). There are numerous approaches for solving problem (1) [1–3]. The most known of them consists in maximization of some component function  $F_i$  under constraints on other functions or in aggregation of criteria  $F_i$  by some linear or non-linear utility function and solving the resulting

optimization problems by nonlinear programming methods [1]. However, in case of non-convex functions  $F_i$  it is not always possible to find all Pareto-optimal solutions in such a way. So, other approaches, that are not reduced to optimization of a scalar criterion, were developed, in particular, the parameter space investigation method [2] and methods of evolutionary programming [3]. The latter in effect are variants of *controlled iterative random search method*: at each iteration an approximate discrete solution  $X_N^*$  consisting of a finite number of points is constructed and then, using information about the objective function  $\bar{F}(X_N^*)$  at points  $X_N^*$  a new generation of points  $Y^N$  is generated in some way (randomly) and a new discrete approximate solution  $X_{N+1}^*$  is selected from the set  $X^N = (X_N^*, Y^N)$ , and so on. Finding out conditions of evolutionary programming algorithm convergence to the set of Pareto-optimal points is a serious scientific problem and is the subject of active research [4–6]. Even convergence of the simplest algorithms of this type is studied only in case of discrete feasible set  $X$  [6]. Let us, for example, sample points  $Y^N$  in the described approach uniformly in  $X$  and let a new approximation  $X_{N+1}^*$  be a Pareto-optimal subset of the discrete pair  $X^N = (X_N^*, Y^N)$ .

Does the sequence  $\{X_N^*\}$  of approximations converge to the Pareto-optimal set  $X^*$  of problem (1)? This article, in particular, aims at finding answers to such type of questions.

## PROBLEM SETTING

In practice, a formulation of the vector optimization problem may be more complex than (1). For example, in the case of the stochastic vector optimization, functions  $\bar{F}$  are actually expectations,  $\bar{F}(x) = E\bar{f}(x, \omega)$ , where the random variable  $\omega$  is defined on some probability space  $(\Omega, \Sigma, P)$ , symbol  $E$  denotes expectation (integral) over measure  $P$  [7, 8]. Usually, in practical problems expectations cannot be calculated analytically, so they are estimated numerically using quadratures or Monte Carlo method. In the latter case empirical approximations of functions  $\bar{F}$  have the form  $\bar{F}^N(x, \omega^N) = (1/N) \sum_{k=1}^N \bar{f}(x, \omega_k)$ , where  $\omega^N = (\omega_1, \dots, \omega_N)$  is the set of independent and identically distributed observations  $\omega_k$  of the random variable  $\omega$ . In [9] one can find conditions of uniform convergence of the empirical approximations  $\bar{F}^N(x, \omega^N)$  to the expectation  $\bar{F}(x) = E\bar{f}(x, \omega)$  on a compact set  $X$ . Then, instead of (1), one has to consider a sequence of approximate problems:

$$\bar{F}^N(x) = \{F_1^N(x), \dots, F_m^N(x)\} \rightarrow \max_{x \in X^N \subset \mathbb{R}^n}, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

where the set of feasible solutions  $X^N$ , in general, can also vary from task to task, for example, the set  $X^N$  can be a discrete approximation of the initial feasible set  $X$  [2]. In the latter case, the approximating functions  $F_1^N(x), \dots, F_m^N(x)$  can be defined only on this discrete set  $X^N$ . Denote  $X_N^*$  the set of Pareto-optimal solutions of (2). The problem is to establish conditions under which the sets  $X_N^*$  approximate the set of solutions  $X^*$ .

In (1)  $\alpha_i$ -quantiles of random variables  $F_i(x, \omega)$  can serve as components of the vector objective function  $\bar{F}(x) = \{EF_1(x, \omega), \dots, EF_m(x, \omega)\}$ . It is known [10] that these quantiles can be found by solving the following auxiliary optimization problem:

$$\Phi_i(x, y_i) = E \max\{(1 - \alpha_i)(F_i(x, \omega) - y_i), \alpha_i(y_i - F_i(x, \omega))\} \rightarrow \min_{y_i \in \mathbb{R}^1}. \quad (3)$$

An approximate solution  $y_i^N(x)$  of (3) for each fixed  $x$  can be found, for example, by  $N$  iterations of the stochastic quasi-gradient method [11], or as a corresponding term of the variational series of the random variable  $F_i(x, \omega)$ . Thus, one again encounters with the approximate problem (2) with functions  $F_i^N(x) = y_i^N(x)$ . Another approach to solving (3) is to use an empirical approximation of components  $\Phi_i(x, y_i)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_i^N(x, y_i) = \\ = (1/N) \sum_{k=1}^N \max\{(1 - \alpha_i)(F_i(x, \omega_k) - y_i), \alpha_i(y_i - F_i(x, \omega_k))\} \rightarrow \min_{y_i \in \mathbb{R}^1} \end{aligned} \quad (4)$$

and finding its approximate solution  $y_i^N(x)$  for each  $x$  by the linear programming method.

## MAIN RESULTS

As noted in [2], the question of convergence of the discrete approximation of problem (1) is not easy. In our case the problem is further complicated by the fact that not only feasible set, but also the objective functions are approximated. To study convergence of approximate solutions of problems (2) to the solution of the original task (1), we'll need some more definitions.

**Definition 1** ( $\bar{\varepsilon}$ -nondominated solutions). Point  $x \in X$  is called  $\bar{\varepsilon}$ -nondominated solution of (1), if there is no other point  $z \in X$  such that  $\bar{F}(z) > \bar{F}(x) + \bar{\varepsilon}$ , where  $\bar{\varepsilon}^N \in \mathbb{R}^m$ .

**Definition 2** [12, Section 4A]. For a sequence of sets  $\{Z_N \subset \mathbb{R}^n, N = 1, 2, \dots\}$  let us define the following cluster sets:

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} Z_N = \{z : \exists z_{N_k} \in Z_{N_k}, z = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{N_k}\},$$

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} Z_N = \{z : \exists z_N \in Z_N, z = \lim_{N \rightarrow \infty} z_N\},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Z_i = \liminf_{N \rightarrow \infty} Z_N = \limsup_{N \rightarrow \infty} Z_N.$$

Denote  $X^*(\bar{\varepsilon})$  the set of all  $\bar{\varepsilon}$ -nondominated solutions of (1). In the same manner define  $X_N^*(\bar{\varepsilon}^N)$   $\bar{\varepsilon}^N$ -nondominated solutions of (2). Our goal is to establish conditions under which sets  $X_N^*(\bar{\varepsilon}^N)$  approximate  $X^*(\bar{\varepsilon})$ .

Let us note some properties of the multivalued mapping  $\bar{\varepsilon} \rightarrow X^*(\bar{\varepsilon})$ .

**Lemma 1.** The mapping  $\bar{\varepsilon} \rightarrow X^*(\bar{\varepsilon})$  is monotone, i.e. for  $\bar{\varepsilon}^1 \leq \bar{\varepsilon}^2$  one has  $X^*(\bar{\varepsilon}^1) \subseteq X^*(\bar{\varepsilon}^2)$ .

*Proof.* Assume the contrary that for some  $x' \in X^*(\bar{\varepsilon}^1)$ ,  $x' \notin X^*(\bar{\varepsilon}^2)$  there is  $z' \in X$  such that  $\bar{F}(z') > \bar{F}(x') + \bar{\varepsilon}^2 \geq \bar{F}(x') + \bar{\varepsilon}^1$ . This inequality contradicts the assumption  $x' \in X^*(\bar{\varepsilon}^1)$ .

The lemma is proved.

**Lemma 2.** For upper semi-continuous (component-wise) on the closed set  $X \subset \mathbb{R}^n$  vector-function  $\bar{F}(x)$  the mapping  $\bar{\varepsilon} \rightarrow X^*(\bar{\varepsilon})$  is upper semicontinuous, i.e.  $\limsup_{N \rightarrow \infty} X^*(\bar{\varepsilon}^N) \subseteq X^*(\bar{\varepsilon})$  for any sequence  $\bar{\varepsilon}^N \rightarrow \bar{\varepsilon}$ .

*Proof.* Let  $\bar{\varepsilon}^N \rightarrow \bar{\varepsilon}$ ,  $N \rightarrow \infty$  and  $X^*(\bar{\varepsilon}^{N_k}) \ni x^{N_k} \rightarrow x'$ ,  $k \rightarrow \infty$ . We must show that  $x' \in X^*(\bar{\varepsilon})$ . Assume the contrary, that  $x' \notin X^*(\bar{\varepsilon})$ . Then there is  $z' \in X$  such that  $\bar{F}(z') > \bar{F}(x') + \bar{\varepsilon}$ . From upper semicontinuity of  $\bar{F}$  it follows  $\bar{F}(z') > \bar{F}(x') + \bar{\varepsilon} \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} (\bar{F}(x^{N_k}) + \bar{\varepsilon}^{N_k})$  and thus for sufficiently large  $k$  relation  $\bar{F}(z') > \bar{F}(x^{N_k}) + \bar{\varepsilon}^{N_k}$  is fulfilled. This contradicts the initial assumption  $x^{N_k} \in X^*(\bar{\varepsilon}^{N_k})$ .

The lemma is proved.

Let us make the following assumptions on relations between problems (1) and (2)

**A1.** For any sequence  $\{X^N \ni x^N \rightarrow x\}$  it holds true  $\bar{F}^N(x^N) \rightarrow \bar{F}(x)$ ,  $N \rightarrow \infty$ .

**A2.** The sequence of feasible sets  $\{X^N, N=1,2,\dots\}$  of (2) satisfies conditions:  $X^N \subseteq X$  and for some  $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}^m$  it holds  $X^*(\bar{\varepsilon}) \subseteq \liminf_{N \rightarrow \infty} X^N$ , i.e. for each point  $x \in X^*(\bar{\varepsilon})$  there is a sequence of feasible points  $x^N \in X^N$  convergent to this point  $x \in X^*(\bar{\varepsilon})$ .

Condition A1 is satisfied in particular if functions  $\bar{F}^N$  are defined on the set  $X \supseteq X^N$  and uniformly converge to  $\bar{F}$  on  $X$ . Other possibilities are considered in [13]. Assumption A2 is automatically satisfied if  $\lim_{N \rightarrow \infty} X^N = X$ , for example, if  $X^N$  discretely approximates, with increasing accuracy, the feasible set  $X$ .

**Theorem 1** (on convergence of solutions of approximate tasks (2) to the solutions of the original problem (1)). Suppose that the vector function  $\bar{F}(x)$  is continuous on a compact set  $X$ , conditions A1–A2 are fulfilled and  $\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\varepsilon}^N = \bar{\varepsilon} > 0$ . Then

- 1)  $\limsup_{N \rightarrow \infty} X_N^*(\bar{\varepsilon}^N) \subseteq X^*(\bar{\varepsilon})$ ,
- 2)  $X^*(\bar{\varepsilon}') \subseteq \liminf_{N \rightarrow \infty} X_N^*(\bar{\varepsilon}^N)$  for all  $\bar{\varepsilon}' < \bar{\varepsilon}$ .

*Proof.* Let us prove the first assertion of the theorem. Assume the contrary, that there are  $X_{N_k}^*(\bar{\varepsilon}^{N_k}) \ni x^{N_k} \rightarrow x' \notin X^*(\bar{\varepsilon})$ . Since the vector function  $\bar{F}(x)$  is bounded from above on a compact set  $X$ , then every point  $x'$  outside of  $X^*(\bar{\varepsilon})$  is  $\bar{\varepsilon}$ -dominated by points from  $X^*(\bar{\varepsilon})$ . Indeed, if it is not true, then there is an infinite sequence of points  $z^s \in X$  such that  $\bar{F}(x') + \bar{\varepsilon} < \bar{F}(z^1)$ ,  $\bar{F}(z^1) + \bar{\varepsilon} < \bar{F}(z^2)$ , ..., i.e.  $\infty \leftarrow \bar{F}(x') + s\bar{\varepsilon} < \bar{F}(z^s)$ , that contradicts boundedness of the vector function  $\bar{F}$  on  $X$ . So, there is a point  $z' \in X^*(\bar{\varepsilon})$  such that  $\bar{F}(z') > \bar{F}(x') + \bar{\varepsilon}$ . By virtue of the condition A2 there is a sequence  $z^N \in X^N$  such that  $z^N \rightarrow z'$ ,  $N \rightarrow \infty$ .

Thus, it holds true

$$\bar{F}(z') = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{F}^{N_k}(z^{N_k}) > \bar{F}(x') + \bar{\varepsilon} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{F}^{N_k}(x^{N_k}) + \bar{\varepsilon}^{N_k}).$$

Then  $\bar{F}^{N_k}(z^{N_k}) > \bar{F}^{N_k}(x^{N_k}) + \bar{\varepsilon}^{N_k}$  for all sufficiently large  $k$ , that contradicts the assumption  $x^{N_k} \in X_{N_k}^*(\bar{\varepsilon}^{N_k})$ . The first assertion is proved.

Now let us prove the second statement of the theorem. Assume the contrary, that there exists  $x' \in X^*(\bar{\varepsilon}') \subseteq X^*(\bar{\varepsilon})$  (see Lemma 1) such that  $x' \notin \liminf_{N \rightarrow \infty} X_N^*(\bar{\varepsilon}^N)$ . By condition A2 there exists a sequence  $X^N \ni x^N \rightarrow x'$ . Then there exist its subsequence  $\{x^{N_k}, k=1,2,\dots\}$  such that  $x^{N_k} \notin X_{N_k}^*(\bar{\varepsilon}^{N_k})$  for all sufficiently large  $k$ , so there are points  $z^{N_k} \in X_{N_k}$  such that  $\bar{F}^{N_k}(z^{N_k}) > \bar{F}^{N_k}(x^{N_k}) + \bar{\varepsilon}^{N_k}$ . By compactness of  $X \supseteq X_{N_k} \ni z^{N_k}$ , without loss of generality, we can consider that  $z^{N_k} \rightarrow z'$  and  $x^{N_k} \rightarrow x'$ , thus, by assumption A1,

$$\bar{F}(z') = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{F}^{N_k}(z^{N_k}) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{F}^{N_k}(x^{N_k}) + \bar{\varepsilon}^{N_k}) = \bar{F}(x') + \bar{\varepsilon} > \bar{F}(x') + \bar{\varepsilon}'.$$

Thus, the point  $x'$  is  $\bar{\varepsilon}'$ -dominated, that contradicts the assumption  $x' \in X^*(\bar{\varepsilon}')$ .

The second statement is proved.

**Remark 1.** In [13], an analog of Theorem 1 was proved under a stronger assumption than A2:  $\lim_{N \rightarrow \infty} X^N = X$ . If the set  $X^N$  is a discrete approximation of the feasible set  $X$ , than condition A2 shows that for the validity of the theorem on convergence of solutions  $X_N^*(\bar{\varepsilon}^N)$  to  $X^*(\bar{\varepsilon})$  it is enough to improve approximations of the feasible set only in the vicinity of approximate Pareto-optimal points  $X^*(\bar{\varepsilon})$ .

**Remark 2.** Theorem 1, in particular, means that

$$X^* = X^*(\bar{0}) \subseteq \liminf_{N \rightarrow \infty} X_N^*(\bar{\varepsilon}^N) \subseteq \limsup_{N \rightarrow \infty} X_N^*(\bar{\varepsilon}^N) \subseteq X^*(\bar{\varepsilon}), \quad (5)$$

where  $X^* = X^*(\bar{0})$  is the set of weakly Pareto-optimal solutions of problem (1). And since the mapping  $\bar{\varepsilon} \rightarrow X^*(\bar{\varepsilon})$  is upper semicontinuous, also at  $\bar{\varepsilon} = 0$ , then relation (5) means that  $\bar{\varepsilon}$ -approximate solutions of problem (2) for sufficiently small  $\bar{\varepsilon}$  approximate the set of weakly Pareto optimal solutions of problem (1).

## CONCLUSIONS

The paper studies a general approximation scheme for solving vector optimization problems. The objective vector function and the feasible set of the problem are substituted by their approximations. Accurate calculating of the objective functions or constraints of the problem is often impossible for finite (or reasonable) time and, therefore, the problem needs to be approximated. This situation is typical for stochastic multiobjective optimization. Approximate problems themselves are solved approximately with some accuracy, i.e. their approximately nondominated solutions are found. It is shown that under natural conditions, uniform convergence of approximation functions and set convergence of feasible domains, the found solutions approximate from above and from below approximately nondominated solutions of the original problem.

1. Miettinen K. Nonlinear multiobjective optimization. — Boston/London/Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 298 p.
2. Sobol I.M., Statnikov R.B. Vybor optimalnyh parametrov v zadachah so mnogimi kriteriyami (Selection of optimal parameters in problems with multiple criteria). 2-nd ed, revised and supplemented. — Moscow: Drofa, 2006. — 176 p. (In Russian).
3. Deb K. Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. — Chichester: John Wiley & Sons, 2001. — 497 p.
4. Hanne T. On the convergence of multiobjective evolutionary algorithms // European J. of Operational Research. — 1999. — 117. — P. 553–564.
5. Li Z., Li Zhe, Rudolph G. On the convergence properties of quantum-inspired multi-objective evolutionary algorithms. In: Advanced intelligent computing theories and



- applications. With aspects of contemporary intelligent computing techniques. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. — P. 245–255.
6. Laumanns M., Zenklusen R. Stochastic convergence of random search methods to fixed size Pareto front approximations // *European J. of Operational Research*. — 2011. — 213. — P. 414–421.
  7. Ben Abdelaziz F. Solution approaches for the multiobjective stochastic programming // *European J. of Operational Research*. — 2012. — 216. — P. 1–16.
  8. Gutjahr W., Pichler A. Stochastic multi-objective optimization: a survey on non-scalarizing methods // *Annals of Operations Research*. — 2013. — P. 1–25.
  9. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A. *Lectures on stochastic programming: Modeling and theory*. Second Edition. — Philadelphia: SIAM, 2014. — 494 p.
  10. Koenker R. *Quantile Regression*. — Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2005.
  11. Ermoliev Y.M. *Metody stokhasticheskogo programmirovaniya (Methods of stochastic programming)*. — Moscow: Nauka, 1976. — 240 p. (in Russian).
  12. Rockafellar R.T., Wets R.J-B. *Variational Analysis*. — Berlin: Springer, 1998 (3rd Printing in 2009). — 734 p.
  13. Norkin B.V. Sample approximations of multiobjective stochastic optimization problems // [www://optimization-online.org](http://www.optimization-online.org). Electronic preprint. — November 2014. — Access: [http://www.optimization-online.org/DB\\_HTML/2014/11/4655.html](http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2014/11/4655.html)

UDC 519.6

## **ON THE APPROXIMATION OF VECTOR OPTIMIZATION PROBLEMS**

**B.V. Norkin**

*Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine*

Vector optimization has a great variety of applications. Such problems naturally appear in stochastic optimization, where the optimization problem contains random parameters. In the latter case the vector objective function may include mean value, median, variance, quantiles and other characteristics of the random objective function. The difficulty is that these quantities usually cannot be calculated exactly and are non-convex as functions of variable parameters. These circumstances set additional difficulties for solving corresponding vector optimization problems.

We consider an approximation approach to solving vector optimization problems. The standard approach to such problems is to optimize one criterion under constraints on the others or to scalarize the problem, i.e. to combine all criteria into one scalar criterion. This paper describes a completely different approach, where the feasible set is approximated by a discrete grid (deterministic or random) and the vector function is approximately calculated on this grid. The obtained discrete problem is exactly solved by Pareto type optimization.

The paper studies conditions for convergence of the approximation method when the objective functions and the feasible set are replaced by their more and more fine approximations.

Sufficient conditions are established for Pareto-optimal solutions of the approximate problems to converge in set convergence sense to the Pareto optimal solution of the original problem (with some accuracy). Namely, it is required for the approximate functions to converge uniformly to the original function and for the feasible set approximations (possibly discrete) to converge to elements of the

original feasible set, at least, in the vicinity of the solution. The result confirms a natural hypothesis that the approximation accuracy should increase when approaching to the solution.

**Keywords:** vector optimization, stochastic multicriteria optimization, Pareto optimality, discrete approximation, epsilon-dominance.

1. Miettinen K. *Nonlinear multiobjective optimization*. Boston/London/Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 298 p.
2. Sobol I.M., Statnikov R.B. *Vybor optimalnyh parametrov v zadachah so mnogimi kriteriyami* (Selection of optimal parameters in problems with multiple criteria). 2-nd ed, revised and supplemented. Moscow: Drofa, 2006. 176 p. (In Russian).
3. Deb K. *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. Chichester: John Willey & Sons, 2001. 497 p.
4. Hanne T. On the convergence of multiobjective evolutionary algorithms. *European J. of Operational Research*. 1999. 117. P. 553–564.
5. Li Z., Li Zhe, Rudolph G. *On the convergence properties of quantum-inspired multi-objective evolutionary algorithms*. In: *Advanced intelligent computing theories and applications. With aspects of contemporary intelligent computing techniques*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. P. 245–255.
6. Laumanns M., Zenklusen R. Stochastic convergence of random search methods to fixed size Pareto front approximations. *European J. of Operational Research*. 2011. 213. P. 414–421.
7. Ben Abdelaziz F. Solution approaches for the multiobjective stochastic programming. *European J. of Operational Research*. 2012. 216. P. 1–16.
8. Gutjahr W., Pichler A. *Stochastic multi-objective optimization: a survey on non-scalarizing methods*. *Annals of Operations Research*. 2013. P. 1–25.
9. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A. *Lectures on stochastic programming: Modeling and theory*. Second Edition. Philadelphia: SIAM, 2014. 494 p.
10. Koenker R. *Quantile Regression*. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2005.
11. Ermoliev Y.M. *Metody stokhasticheskogo programmirovaniya* (Methods of stochastic programming). Moscow: Nauka, 1976. 240 p. (in Russian).
12. Rockafellar R.T., Wets R.J-B. *Variational Analysis*. Berlin: Springer, 1998 (3rd Printing in 2009). 734 p.
13. Norkin B.V. Sample approximations of multiobjective stochastic optimization problems. [www://optimization-online.org](http://www.optimization-online.org). Electronic preprint. November 2014. Access: [http://www.optimization-online.org/DB\\_HTML/2014/11/4655.html](http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2014/11/4655.html)

Получено 12.12.2014

# СТАБИЛИЗАЦИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ПРОЦЕССОВ В КОГНИТИВНЫХ КАРТАХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МОДАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ СОСТОЯНИЯ

В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский

*Институт прикладного системного анализа Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт»*

Исследовано применение метода модального управления неустойчивыми импульсными процессами в когнитивных картах сложных систем разной природы. Рассмотрены модальные регуляторы состояния с одним и несколькими управляющими воздействиями для управления когнитивной картой, представленной посредством модели в пространстве состояний. Приведен практический пример, демонстрирующий применение модального управления в коммерческом банке, деятельность которого описана при помощи когнитивной карты.

**Ключевые слова:** когнитивная карта, модальное управление, стабилизация импульсных процессов, расположение полюсов замкнутой системы.

Досліджено застосування методу модального керування нестійкими імпульсними процесами в когнітивних картах складних систем різної природи. Розглянуто модальні регулятори стану з одним та декількома керуючими впливами при управлінні когнітивною картою, яка представлена моделлю у просторі станів. Наведено практичний приклад, що демонструє застосування модального керування у комерційному банку, діяльність якого описано за допомогою когнітивної карти.

**Ключові слова:** когнітивна карта, модальне керування, стабілізація імпульсних процесів, розташування полюсів замкненої системи.

## ВВЕДЕНИЕ

Когнитивное моделирование [1–5] в настоящее время является одним из распространенных подходов для исследования проблем слабоструктурированных социально-экономических систем. Оно применяется в тех случаях, когда объектом исследования является сложная система большой размерности с многочисленными перекрестными связями. Такими является большинство реальных социальных, экономических, финансовых, экологических, политических систем. В основе когнитивного моделирования лежит понятие когнитивной карты (КК). Согласно [1, 2, 5], КК — это ориентированный граф, вершины (узлы) которого отражают компоненты сложных систем (координаты, факторы), а ребра — связи между этими факторами. Построение КК выполняется при участии экспертов, что позволяет количественно и качественно описать взаимосвязи между компонентами сложной системы при помощи меченого орграфа. При воздействии на одну или несколько вершин КК возмущений в виде импульсов модель КК переходит в динамический переходной режим, который получил название импульсного процесса [1, 2, 5].

Правило изменения значений координат вершин КК при импульсном процессе в свободном движении сформулировано в виде разностного уравнения первого порядка в приращениях [2, 3, 4, 5]:

$$\Delta y_i(k+1) = \sum_{j=1}^n w_{ji} \Delta y_j(k), \quad (1)$$

где  $\Delta y_i(k) = y_i(k) - y_i(k-1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $w_{ji}$  — весовой коэффициент ребра ориентированного графа, которое идет от  $j$ -ой вершины к  $i$ -ой,  $n$  — количество вершин КК. В векторной форме выражение (1) записывается следующим образом:

$$\Delta Y(k+1) = W^T \Delta Y(k), \quad (2)$$

где  $W$  — весовая матрица смежности КК,  $\Delta Y$  — вектор приращений значений  $y_i$  вершин КК.

Одной из задач анализа КК является исследование ее устойчивости в динамическом режиме. Часто оказывается, что в КК импульсный процесс (1) является неустойчивым. В других случаях получается, что процесс (1) является устойчивым, но слишком медленнодействующим либо, наоборот, с большими отклонениями. Если анализ КК показал, что импульсный процесс находится на границе устойчивости или является неустойчивым, то его необходимо стабилизировать путем формирования внешних управляющих воздействий.

В работе [6] исследована взаимосвязь динамики системы в пространстве состояний и модели импульсных процессов КК (1). При этом показано, что модель в пространстве состояний (в том числе с регулятором состояния в контуре обратной связи) может быть эквивалентно представлена как КК. В простейшем случае в уравнении (1) приращения  $\Delta y_i(k)$  можно рассматривать как переменные состояния  $x_i$  ( $\Delta Y = X$ ), а матрицу  $W^T$  — как матрицу состояния  $A$  в уравнении свободного движения системы в пространстве состояний:

$$X(k+1) = AX(k). \quad (3)$$

Для того, чтобы реализовать управление импульсным процессом КК на основе методов современной теории управления, необходимо иметь уравнение вынужденного движения системы. Возможны несколько вариантов получения этого уравнения в зависимости от физической природы исследуемой сложной системы.

Первый вариант возможен в том случае, когда существует некоторое подмножество вершин КК, которые, во-первых, не имеют входных ребер (в том числе петель), а во-вторых, которыми физически можно варьировать в некоторых пределах. Будем называть эти вершины управляющими. Упорядочим вектор состояния таким образом, чтобы сначала шли «обычные» вершины, а потом управляющие. Тогда матрицу смежности КК можно

представить в блочном виде как  $W^T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , а вектор приращений координат вершин — как вектор  $\begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix}$ , где  $U$  — вектор приращений значений управляющих вершин КК. Тогда уравнение (3) можно записать в форме стандартного уравнения состояния в дискретном времени

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k). \quad (4)$$

Второй вариант получения уравнения (4) можно применить тогда, когда существует реальная возможность введения новых дополнительных вершин КК, значения которых могут формироваться и устанавливаться в дискретные моменты времени лицом, принимающим решения, и которые можно использовать как управления, воздействующие на конкретные переменные состояния (вершины КК). Тогда в уравнении (4) матрица управления  $B$  будет содержать, скорее всего, единицы и нули, причем диагональные элементы, соответствующие управлениям в векторе  $U$ , будут равны единице. При этом ранг матрицы  $B$  должен быть полным.

**Цель** работы — исследование возможности применения метода модального управления для синтеза регуляторов состояния (5) при скалярном и векторном управлении для стабилизации неустойчивых импульсных процессов в когнитивных картах сложных систем.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [6] проведены исследования основных свойств моделей (2) и (4), в частности, показано, что если КК (2) является устойчивой, то система (4) будет асимптотически устойчивой, а собственные числа матрицы смежности КК  $W$  являются модами системы в пространстве состояний. Также показано, что управляемость системы (4) означает возможность сформировать вектор управления

$$U(k) = -KX(k), \quad (5)$$

который приводит соответствующую КК в устойчивое статическое состояние.

Также в работе [6] было выполнено моделирование синтезированного регулятора состояния (5) для стабилизации неустойчивого импульсного процесса в КК, составленной для анализа кадровой политики в морском флоте. Синтез регулятора состояния был выполнен на основе заданного характеристического уравнения замкнутой системы [7] при скалярном управляющем воздействии. При этом была достигнута стабилизация импульсного процесса КК, однако были отмечены очень большие колебания синтезированного управляющего воздействия при переходном процессе.

Большой уровень управляющих воздействий для указанного метода был также отмечен в [8].

## РЕАЛИЗАЦИЯ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В КОГНИТИВНЫХ КАРТАХ

Рассмотрим вначале простейший случай, когда на систему действует только одно управляющее воздействие. Это может означать, что лицо, принимающее решение, имеет возможность осуществлять непосредственное влияние только на одну из вершин КК, то есть  $B$  является вектором-столбцом, только одна из координат которого равна единице, а остальные — нулю. Если система (4) неустойчива, но управляема, то даже с помощью только одного управляющего воздействия, непосредственно действующего только на одну вершину, ее возможно стабилизировать.

Когда система управляема и имеет скалярное управление, задача модального управления решается однозначно. Для этого необходимо решить относительно коэффициентов вектора-строки  $K = (k_n \ k_{n-1} \dots k_1)$  уравнение

$$\det(zI - A + BK) = z^n + M_1 z^{n-1} + \dots + M_{n-1} z + M_n, \quad (6)$$

где  $z^n + M_1 z^{n-1} + \dots + M_{n-1} z + M_n = 0$  — желаемый характеристический полином замкнутой системы. Это можно сделать путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $z$ , в результате чего получим систему  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными, которая однозначно решается.

Также известен способ вычисления  $K$ , базирующийся на приведении уравнения (4) к канонической форме [7]. Он позволяет в явном виде найти коэффициенты обратной связи, зная коэффициенты желаемого характеристического полинома системы. В канонической форме управляемости для системы с одним входом уравнение (4) принимает вид:

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} X(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k). \quad (7)$$

Подставляя (5) в (7), получим уравнение

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n - k_n & -a_{n-1} - k_{n-1} & \dots & -a_1 - k_1 \end{pmatrix} X(k).$$

Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы примет вид:

$$(a_n + k_n) + (a_{n-1} + k_{n-1})z + \dots + (a_1 + k_1)z^{n-1} + z^n = 0. \quad (8)$$

Приравнявая (6) и (8), получим в явном виде коэффициенты вектора обратной связи  $k_i = M_i - a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Далее необходимо вернуться к исходному базису (до преобразования к каноническому виду), умножив полученный вышеописанным образом вектор  $K$  на матрицу перехода  $S = \tilde{M}M^{-1}$ , где  $\tilde{M}$ ,  $M^{-1}$  — матрицы управляемости системы (7) и исходной системы (4), соответственно [8]. Эти преобразования приводят к известной формуле Аккермана [9].

В случае, если на систему действуют несколько управляющих воздействий, задача не имеет однозначного решения. В теории управления предложено ряд способов нахождения матрицы обратной связи в этом случае (например, [10]). Рассмотрим простейший случай, описанный в [8].

Зададим желаемый спектр замкнутой системы  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , где все значения по модулю меньше единицы, различны между собой и среди  $\lambda_j$  нет собственных чисел матрицы  $A$ . Для простоты зададим действительный спектр. Пусть имеется  $m$  управляющих воздействий,  $m \leq n$ . Введем в рассмотрение  $\bar{R}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , — собственные вектора матрицы состояния замкнутой системы  $A - BK$ , т. е. вектора, для которых выполняются соотношения  $(A - BK)\bar{R}_j = \lambda_j \bar{R}_j$ . Последнее равенство можно иначе записать так:

$$(A - \lambda_j I)\bar{R}_j = BK\bar{R}_j = B\bar{P}_j, \quad (9)$$

где вектора-столбцы  $\bar{P}_j = K\bar{R}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , имеют размерность  $m$ .

Зададим произвольную матрицу  $P$  размерности  $m \times n$  так, чтобы она имела полный ранг и не имела нулевых столбцов,  $P = (\bar{P}_1 \bar{P}_2 \dots \bar{P}_n)$ . Тогда из (9) можно найти  $n$  векторов  $\bar{R}_j = (A - \lambda_j I)^{-1} B\bar{P}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , и сформировать из них матрицу  $R = (\bar{R}_1 \bar{R}_2 \dots \bar{R}_n)$  размерности  $n \times n$ , которая будет невырожденной. Тогда, поскольку  $\bar{P}_j = K\bar{R}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , матрицу обратной связи можно найти как  $K = PR^{-1}$ , которая, по построению, обеспечивает желаемый набор мод замкнутой системы. Выбор матрицы  $P$  влияет на характер управляющих воздействий, но спектр системы остается инвариантным относительно  $P$ .

Данный подход возможен, если  $(A - \lambda_j I)^{-1}$  существует, т. е. если среди  $\lambda_j$  нет собственных чисел матрицы  $A$ . Если для некоторой моды  $\lambda_j$  это не так, то, как показано в [8], в качестве  $\bar{R}_j$  можно брать собственный вектор матрицы  $A$ , соответствующий собственному числу  $\lambda_j$ , а вместо  $\bar{P}_j$  можно

брать нулевой вектор. В любом случае матрица обратной связи находится по формуле

$$K = PR^{-1}.$$

Отметим также, что в случае  $m = n$ , т. е. если количество управляющих воздействий равно количеству переменных состояния, можно применить еще один метод модального управления, основанный на приведении матрицы  $A$  к диагональному виду. Но этот случай представляет меньший интерес, поскольку он является не таким распространенным для КК, и для него уже разработаны другие методы управления [11].

Полученное любым способом управление (5) непосредственно подается на вершины КК. В случае необходимости его можно отразить в графе КК, для этого (5) следует представить разностным уравнением  $U(k+1) = -KFX(k) - KGU(k)$ , как описано в [6]. Отметим, что  $U$  — это вектор приращений управлений (так же как и  $X$  — вектор приращений координат).

До сих пор предполагалось, что значения в вершинах КК измеряемы, то есть все переменные состояния наблюдаются или вычисляются непосредственно. Потому не было необходимости в уравнении измерения, и модель в пространстве состояний состояла только из уравнения состояния. К сожалению, это не всегда соответствует действительности. Если есть подмножество неизмеряемых вершин, целесообразно ввести уравнение измерения

$$Z(k) = CX(k), \quad (10)$$

где матрица  $C$  имеет вид  $C = (I \ 0)$ , если вершины КК перенумерованы так, чтобы вначале шли наблюдаемые, а потом ненаблюдаемые вершины. Вектор измерений  $Z$  является вектором приращений измеряемых координат  $\Delta u_i$ .

Тогда уравнение управления (5) превращается в уравнение

$$U(k) = -K\hat{X}(k), \quad (11)$$

где  $\hat{X}(k)$  — оценка вектора состояния  $X(k)$ . Если система наблюдаема, оценивание можно выполнять при помощи наблюдателя Люенбергера [6, 7]:

$$\hat{X}(k+1) = A\hat{X}(k) + BU(k) + L(Z(k) - C\hat{X}(k)), \quad (12)$$

где  $L$  выбирается из условия, чтобы собственные числа матрицы  $A - LC$  были по модулю меньше единицы.

## ПОСТРОЕНИЕ КОГНИТИВНОЙ КАРТЫ РАБОТЫ КОММЕРЧЕСКОГО БАНКА

Рассмотрим КК [11], отражающую работу коммерческого банка (рис. 1).

На рис. 1 введены следующие обозначения вершин КК: 1 — региональная сеть, 2 — капитал, 3 — кредиты, 4 — депозиты,



5 — ликвидные активы, 6 — мера риска стабильности, 7 — мера риска ликвидности. Весовая матрица смежности имеет вид:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0.13 & 0.95 & 0 & -0.95 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0.8 & 0.9 & 0 & -0.2 \\ 0.1 & 0.03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 1.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Легко убедиться, что данная система является неустойчивой, ее моды равны  $0.1127 \pm 0.7289i$ ,  $-0.0873 \pm 0.1701i$ ,  $0.6415$ ,  $1.0538 \pm 0.3134i$  (последние два значения по модулю больше единицы).

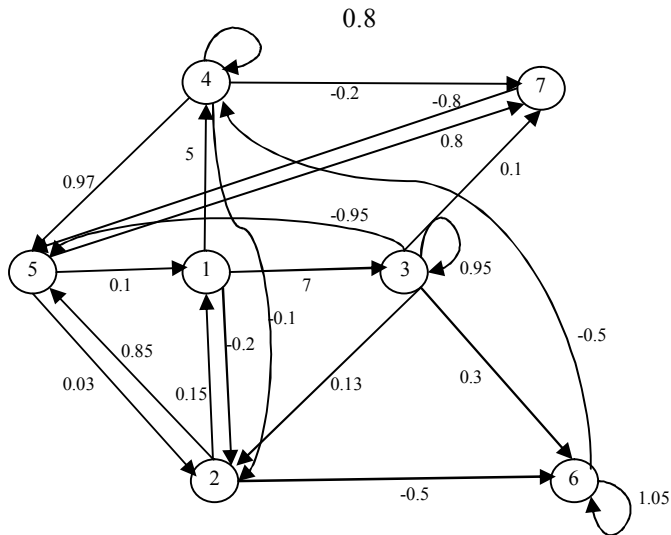


Рис. 1. Когнитивная карта коммерческого банка

Динамику этой системы можно описать в виде уравнения (4), где  $A = W^T$ , а матрицу  $B$  будем формировать в зависимости от количества управляющих воздействий. Поскольку все вершины имеют входящие ребра, управления будем формировать извне.

Рассмотрим и сравним два случая. Пусть вначале управляющие воздействия можно подавать только на одну вершину, а именно на вершину 3 — кредиты. То есть, предположим, что единственным управляющим воздействием является изменение объема кредитного портфеля. Тогда  $B = (0010000)^T$ . Зададим следующий вектор желаемых мод замкнутой

системы:

$$\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.4, \lambda_3 = 0.3, \lambda_4 = 0.2, \lambda_5 = -0.3, \lambda_6 = -0.5, \lambda_7 = -0.7.$$

Найдем соответствующий вектор управления:

$$K = (2.5973 \ 4.4349 \ -2.8500 \ 2.4876 \ 0.7215 \ -4.0154 \ -1.2946).$$

Результаты моделирования КК при таком управлении показаны на рис. 2. Динамика управления показана на рис. 3.

Рассмотрим другой случай, когда управлению подвергаются три вершины КК: 3 — кредиты, 4 — депозиты, 5 — ликвидные активы. Тогда пусть

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

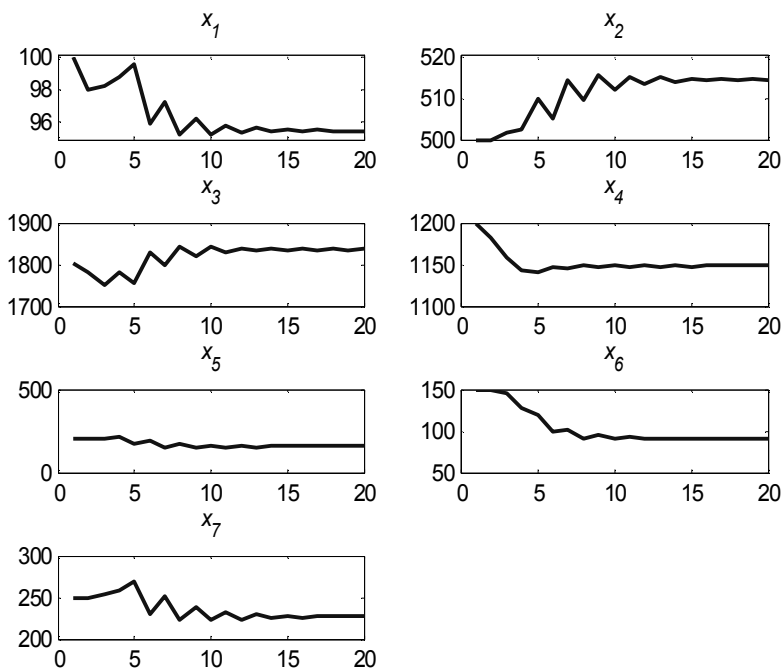


Рис. 2. Динамика изменений значений вершин КК при одном управляющем воздействии

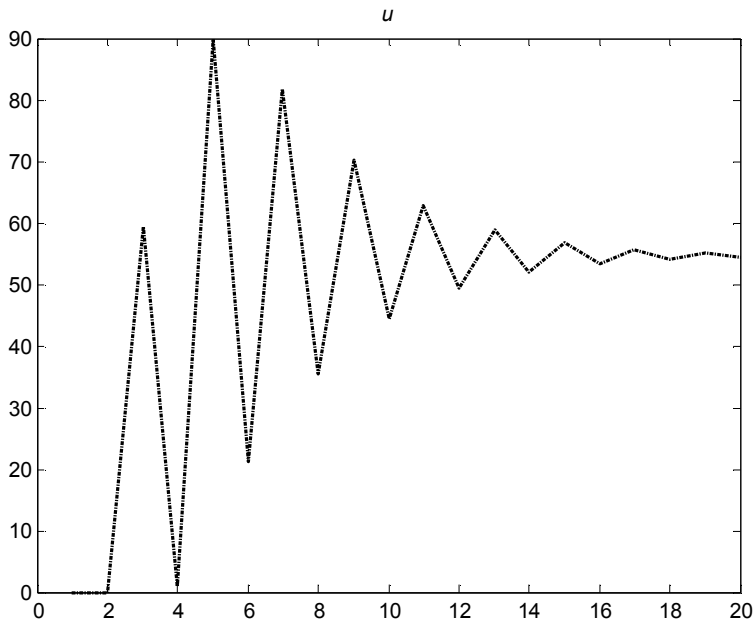


Рис. 3. Динамика одного управляющего воздействия

Для корректного сравнения зададим тот же самый желаемый спектр замкнутой системы. Поскольку задача решается неоднозначно, зададим вспомогательную матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда по вышеописанному алгоритму получим следующую матрицу обратной связи:

$$K = \begin{pmatrix} -5.8598 & 0.1261 & -0.8622 & -0.2778 & -0.1907 & -1.3266 & 0.1016 \\ -2.2380 & -0.6768 & 0.0947 & -0.6815 & -0.0780 & 0.1143 & 0.0293 \\ 1.1015 & -1.4347 & 0.1766 & 0.3720 & -1.3063 & 1.2721 & 0.0877 \end{pmatrix}.$$

Результаты моделирования КК при таком управлении показаны на рис. 4.

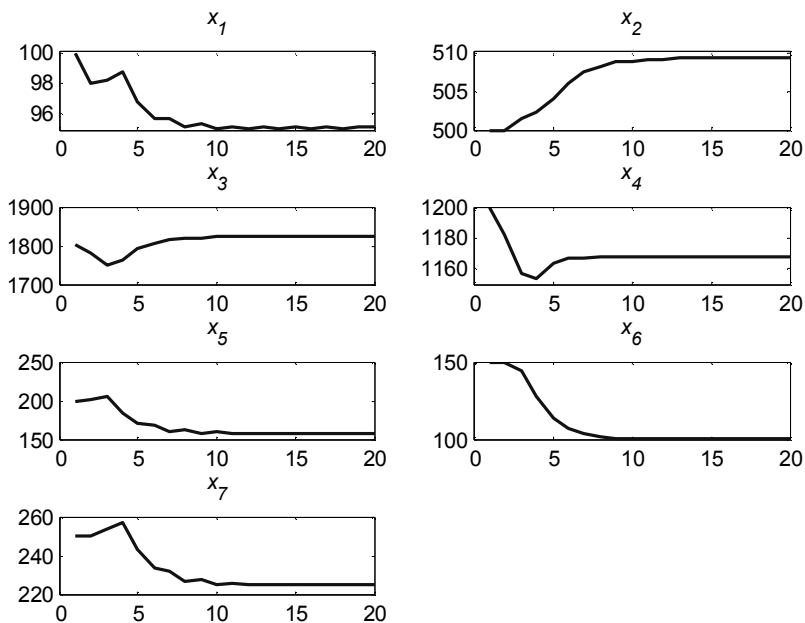


Рис. 4. Динамика изменений значений вершин КК при трех управляющих воздействиях

Динамика управления показана на рис. 5.

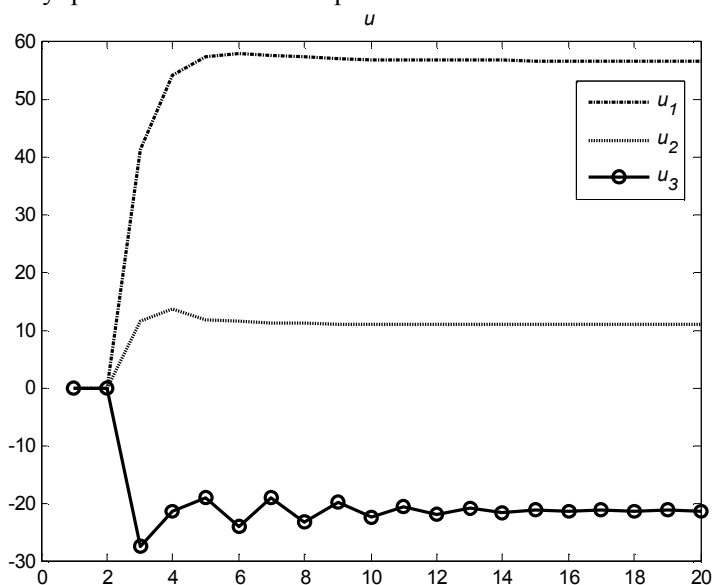


Рис. 5. Динамика трех управляющих воздействий

Таким образом, на основании проведенного моделирования можно утверждать, что методы модального управления являются применимыми для стабилизации неустойчивых процессов когнитивных карт и обеспечивают удовлетворительный результат управления. Несмотря на то, что собственные числа замкнутой системы при одном и при нескольких управляющих воздействиях одинаковы, при трех управляющих воздействиях амплитуда и

время стабилизации этих воздействий меньше, а переходные процессы координат вершин КК становятся более гладкими, чем при одномерном управлении. То есть, увеличивая количество управляющих воздействий, можно улучшить качество управления. Это имеет большое значение, так как в большинстве случаев, в том числе при управлении банком, невозможно подавать управляющие воздействия большой амплитуды и частоты, и сами управляемые переменные часто также не могут резко изменяться.

## Выводы

Проведенное исследование возможности применения методов модального управления в когнитивных моделях показало, что эти методы позволяют стабилизировать импульсные процессы и обеспечить желаемые характеристики в переходном режиме. В когнитивную модель введены внешние управляющие воздействия на основе регуляторов состояния для стабилизации импульсных процессов в когнитивных картах. В отличие от методов, основывающихся на моделях типа «вход — выход» [8], при предложенном подходе количество управляющих воздействий может быть меньше, чем количество вершин когнитивной карты.

Исследованы случаи модального управления с одним и с несколькими управляющими воздействиями. Проведено моделирование реальной системы модального управления коммерческим банком, динамика которого задана в виде когнитивной модели. В результате получен вывод, что при управлении с несколькими воздействиями легче обеспечить необходимое быстродействие и одновременно гладкость переходного процесса, а также реализуемость самих управляющих воздействий, чем при управлении с помощью одного внешнего воздействия.

1. Axelrod R. The Structure of Decision: Cognitive Maps of Political Elites / R. Axelrod. — Princeton University Press, 1976. — 404 p.
2. Roberts F. Discrete Mathematical Models with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems / F. Roberts. — Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1976. — 559 p.
3. Авдеева З.К. Когнитивный подход в управлении / З.К. Авдеева, С.В. Коврига, Д.И. Макаренко, В.И. Максимов // Проблемы управления. — 2002. — № 3. — С. 2–8.
4. Максимов В.И. Структурно-целевой анализ развития социально-экономических ситуаций / В.И. Максимов // Проблемы управления. — 2005. — № 3. — С. 30–38.
5. Горелова Г.В. Исследование слабоструктурированных проблем социально-экономических систем. Когнитивный подход / Г.В. Горелова, Е.Н. Захарова, С.А. Радченко. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 2006. — 332 с.
6. Романенко В.Д. Обеспечение устойчивости импульсных процессов в когнитивных картах на основе моделей в пространстве состояний / В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2014. — № 1. — С. 26–42.
7. Isermann R. Digital control systems / R. Isermann. — Springer-Verlag, 1981. — 566 p.
8. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3 томах. — Т.2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. Н.Д. Егулова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. — 736 с.

9. Ackermann J. *Sampled-Data Control Systems* / J. Ackermann. — Berlin, Springer-Verlag, 1985. — 596 p.
10. Valasek M. Efficient Eigenvalue Assignments for General Linear MIMO Systems / M. Valasek, N. Olgac // *Automatica*. — 1995. — 31. — P. 1605–1617.
11. Романенко В.Д. Метод адаптивного управления неустойчивыми импульсными процессами в когнитивных картах на основе эталонных моделей / В.Д. Романенко, Ю.Л. Мильявский, А.А. Реутов // *Проблемы управления и информатики*. — 2015. — № 2. — С. 35–45.

UDC 62.50

## IMPULSE PROCESSES STABILISATION IN COGNITIVE MAPS OF COMPLEX SYSTEMS BASED ON MODAL STATE REGULATORS

V.D. Romanenko, Y.L. Milyavskiy

*ESC «Institute for applied systems analysis» «National technical university of Ukraine»*

**Introduction.** Cognitive modelling is one of the most widespread approaches for ill-structured socio-economic systems research nowadays. It is usually used when subject of enquiry is a complex high-dimensional system; in fact, most of financial, economical, social, political systems belong to this category. Cognitive map (CM) is a directed graph, where vertices represent concepts, directed edges represent the causal effect relationships between concepts, and the weights of edges represent the degree of the causal effect. When CM switches to transition process as a result of external or internal impulse, so called «impulse process» is described by difference first-order equation for increments. It was previously shown by the authors that impulse process can also be equivalently expressed by state-space model. One of the most important questions is how to stabilise unstable CM. For this purpose control inputs should be added to the system. Then the problem of regulators design arises.

**Purpose** of the paper is to investigate possibility of applying modal control methods for state regulators design (with single and multiple controls) to stabilise unstable impulse process in CM.

**Results.** Different methods of modal control were investigated and applied for CM impulse process stabilisation. CM dynamics was presented by state space model. Problem of external control inputs for CM was discussed. It was demonstrated that as opposed to «input — output» models, state space models allow to use smaller number of controls for stabilisation (if the system is controllable). Cases with single and multiple inputs were discussed. Impulse process in the CM for commercial bank was simulated, and different approaches to modal regulators design were applied for this cognitive model. Simulation results demonstrated efficiency of the proposed approach to CM stabilisation. It was also shown that modal control with multiple inputs is preferable where possible because it allows to get quicker response and smoother transition process with lower amplitude of control inputs.

**Conclusion.** Applying of modal control methods allows effective stabilising of CM. Using multiple control inputs helps to increase performance and make transition process smoother and easier to implement.

**Keywords:** cognitive map, modal control, impulse process stabilisation, closed loop pole placement.

1. Axelrod R. *The Structure of Decision: Cognitive Maps of Political Elites*. Princeton University Press. 1976. 404 p.
2. Roberts F. *Discrete Mathematical Models with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall. 1976. 559 p.
3. Avdeeva Z.K., Kovriga S.V., Makarenko D.I., Maksimov V.I. Cognitive approach in control. *Control problems*, 2002, no. 3, pp. 2–8 (in Russian).
4. Maksimov V.I. Structural–target analysis of socio-economic situations development. *Control problems*, 2005, no. 3, pp. 30–38 (in Russian).
5. Gorelova G.V., Zakharova E.N., Radchenko S.A. *Research of semi-structured problems in socio-economic systems*. Cognitive approach. Rostov-na-Donu: Publisher RSU, 2006, 332 p. (in Russian).
6. Romanenko V.D., Milyavskiy Y.L. Stabilizing of impulse processes in cognitive maps based on state-space models. *System research & information technologies*, 2014, no. 1, pp. 26–42 (in Russian).
7. Isermann R. *Digital control systems*. Springer-Verlag. 1981. 566 p.
8. Yegupov N.D., ed. *Methods of classic and modern automatic control theory. Handbook*. Vol. 2: Regulators design and optimisation theory of automated control systems. M.: MSTU, 2000. 736 p. (in Russian).
9. Ackermann J. *Sampled-Data Control Systems*. Berlin, Springer-Verlag. 1985. 596 p.
10. Valasek M., Olgac N. Efficient Eigenvalue Assignments for General Linear MIMO Systems. *Automatica*, 1995, vol. 31, pp. 1605–1617.
11. Romanenko V.D., Milyavskiy Y.L., Reutov A.A. Adaptive Control Method for Unstable Impulse Processes in Cognitive Maps Based on Reference Models. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2015, no. 2, pp. 35–45 (in Russian).

Получено 30.11.2014

## АЛГОРИТМ РЕКОНСТРУКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ОДНОЙ НАБЛЮДАЕМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В.Г. Городецкий, Н.П. Осадчук

*Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт»*

В статье предлагается алгоритм реконструкции динамической системы по единственной наблюдаемой переменной процесса, представленной в виде временного ряда. При этом неизвестная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений заменяется системой известного вида, в которой неизвестные переменные заменяются производными наблюдаемой переменной. Для нахождения коэффициентов реконструированной системы составляется переопределенная система линейных алгебраических уравнений, которая решается с помощью метода наименьших квадратов. Выполнена проверка правильности результатов алгоритма на численных примерах с учетом влияния точности представления исходных данных.

**Ключевые слова:** оригинальная система, стандартная система, реконструкция, метод наименьших квадратов, наблюдаемая переменная.

У статті пропонується алгоритм реконструкції динамічної системи за єдиною спостережною змінною процесу, представлена у вигляді часового ряду. При цьому невідома автономна система звичайних диференціальних рівнянь замінюється системою відомого виду, в якій невідомі змінні замінюються похідними спостережної змінної. Для знаходження коефіцієнтів реконструйованої системи складається перевизначена система лінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується за допомогою методу найменших квадратів. Виконано перевірку правильності результатів алгоритму на численних прикладах з урахуванням впливу точності представлення вихідних даних.

**Ключові слова:** оригінальна система, стандартна система, реконструкція, метод найменших квадратів, спостережна змінна.

### ВВЕДЕНИЕ

Часто единственной информацией о некотором исследуемом процессе может быть дискретный временной ряд данных о поведении одной из переменных этого процесса. Для получения математической модели в этом случае необходимо решить задачу реконструкции системы по единственной наблюдаемой переменной [1, 2]. Пусть система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = F_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1)$$

описывает некоторый процесс, где  $x_1, \dots, x_n$  — переменные состояния процесса;  $F_1, \dots, F_n$  — полиномы. Систему (1) будем называть оригинальной системой (ОС) [3].



Допустим, единственной наблюдаемой переменной процесса будет  $x_1(t)$ . Широко распространен подход [4, 5], при котором неизвестные переменные системы (1) заменяются производными наблюдаемой переменной по времени, и вместо (1) рассматривается система (2)

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dots \\ \dot{y}_n = Y(y_1, \dots, y_n), \end{cases} \quad (2)$$

где  $Y$  — некоторая функция, которая выбирается таким образом, чтобы решение системы (2) (функция  $y_1(t)$ ) совпадало с наблюдаемой переменной ОС. Причем в некоторых случаях [5] это совпадение может быть точным ( $x_1(t) \equiv y_1(t)$ ), а в других [6, 7] речь идет о более или менее точной аппроксимации на некотором промежутке времени ( $x_1(t) \approx y_1(t)$ ). Систему (2) называют стандартной системой (СС), а функцию  $Y$  — стандартной функцией (СФ) [8]. В качестве СФ чаще всего выбирают полиномы различного вида [6], функции вида «полином плюс дробь» [3, 5] и отношение полиномов [5, 9]:

$$Y(y_1, \dots, y_n) = \frac{P_1(y_1, \dots, y_n)}{P_2(y_1, \dots, y_n)}. \quad (3)$$

Очевидно, что случай (3) наиболее универсальный из трех перечисленных, т.к. другие два типа СФ легко сводятся к (3).

**Цель** данной работы — усовершенствовать предложенный [5] алгоритм определения коэффициентов стандартной системы для повышения точности результатов.

## ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА

Преобразования, связывающие коэффициенты систем (1) и (2), достаточно сложны и громоздки, могут иметь нелинейный характер. Поэтому в литературе (например, [3]) приведены соотношения для различных случаев систем с числом переменных  $n \leq 3$ . Как было показано в [5], при использовании формы СФ (3) можно построить простой алгоритм для вычисления ее коэффициентов. Если принять  $n = 3$ , то СС (2) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = Y(y_1, y_2, y_3), \end{cases} \quad (4)$$

где

$$Y(y_1, y_2, y_3) = \frac{\sum_i N_i p_i(y_1, y_2, y_3)}{\sum_i D_i p_i(y_1, y_2, y_3)}. \quad (5)$$

В выражении (5) числитель и знаменатель — полиномы,  $N_i$  и  $D_i$  — постоянные коэффициенты,  $p_i(y_1, y_2, y_3)$  — произведения степеней переменных СС. В данной статье использовались приведенные в таблице 1 функции  $p_i(y_1, y_2, y_3)$ , которые соответствуют полиному третьей степени. При необходимости таблица 1 может быть дополнена произведениями более высоких степеней.

**Таблица 1**

*Произведения степеней переменных СС, используемые в (5)*

| $i$ | $p_i(y_1, y_2, y_3)$ | $i$ | $p_i(y_1, y_2, y_3)$ | $i$ | $p_i(y_1, y_2, y_3)$ | $i$ | $p_i(y_1, y_2, y_3)$ |
|-----|----------------------|-----|----------------------|-----|----------------------|-----|----------------------|
| 0   | 1                    | 5   | $y_1 y_2$            | 10  | $y_1^3$              | 15  | $y_1 y_3^2$          |
| 1   | $y_1$                | 6   | $y_1 y_3$            | 11  | $y_1^2 y_2$          | 16  | $y_2^3$              |
| 2   | $y_2$                | 7   | $y_2^2$              | 12  | $y_1^2 y_3$          | 17  | $y_2^2 y_3$          |
| 3   | $y_3$                | 8   | $y_2 y_3$            | 13  | $y_1 y_2^2$          | 18  | $y_2 y_3^2$          |
| 4   | $y_1^2$              | 9   | $y_3^2$              | 14  | $y_1 y_2 y_3$        | 19  | $y_3^3$              |

Заметим, что при умножении числителя и знаменателя (5) на одну и ту же постоянную величину значение  $Y(y_1, y_2, y_3)$  не изменится. Поэтому величины коэффициентов (5) не могут быть вычислены однозначно. Для устранения такой ситуации можно зафиксировать один из коэффициентов, считая его известным. Например, в [5] было принято  $D_0 = 1$ . Тогда после приведения к общему знаменателю и группировки слагаемых выражение (5) с учетом табл. 1 примет вид:

$$N_0 + N_1 y_1 + N_2 y_2 + \dots + N_{18} y_2 y_3^2 + N_{19} y_3^3 - D_1 y_1 \dot{y}_3 + D_2 y_2 \dot{y}_3 - \dots - D_{18} y_2 y_3^2 \dot{y}_3 - D_{19} y_3^3 \dot{y}_3 = D_0 \dot{y}_3, \quad (6)$$

где  $D_0 = 1$ .

Так как значения  $y_1$ ,  $y_2 = \dot{y}_1$ ,  $y_3 = \dot{y}_2$ ,  $\dot{y}_3$  легко вычисляются на основании данных о наблюдаемом временном ряде, то несложно получить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), в которой неизвестными станут коэффициенты  $N_i$  и  $D_i$  уравнения (6). При использовании этого уравнения для формирования СЛАУ может иметь место ситуация, когда  $D_0 = 0$ . Тогда, приняв предварительно  $D_0 = 1$ , мы получим при вычислении коэффициентов ошибочный результат. Следовательно,

необходимо иметь возможность фиксировать любой из коэффициентов СФ. Кроме этого, как будет показано далее, для реальных систем может быть заранее известно, какие коэффициенты СФ равны нулю. Поэтому предлагаемый алгоритм, в отличие от [5], предусматривает возможность присвоения произвольного значения любому из коэффициентов СФ. В этом случае целесообразно использовать более общий вид уравнения (6):

$$\begin{aligned} \sum_i N_i p_i(y_1, y_2, y_3) - \dot{y}_3 \sum_i D_i p_i(y_1, y_2, y_3) = \\ = \dot{y}_3 \sum_i \tilde{D}_i p_i(y_1, y_2, y_3) - \sum_i \tilde{N}_i p_i(y_1, y_2, y_3), \end{aligned} \quad (7)$$

где слева сгруппированы слагаемые, в которых  $N_i$  и  $D_i$  — неизвестные коэффициенты, а справа —  $\tilde{N}_i$ ,  $\tilde{D}_i$  — коэффициенты СФ, значения которых приняты известными.

На основе вышеизложенного можно предложить следующий алгоритм вычисления коэффициентов СС. Пусть  $y_1(j)$  — дискретная временная последовательность значений наблюдаемой переменной ОС с шагом дискретизации  $\Delta t$ , содержащая  $N$  точек. Используя уравнения системы (4), можно с помощью численного дифференцирования сформировать дискретные временные последовательности  $y_2(j)$ ,  $y_3(j)$ ,  $\dot{y}_3(j)$ . Для получения системы алгебраических уравнений, позволяющей вычислить коэффициенты СФ (5), формируется векторная временная последовательность

$$v(j) = \{y_1(j), y_2(j), y_3(j), \dot{y}_3(j)\}, \quad (8)$$

С учетом общего вида полиномов числителя и знаменателя (5), а также количества известных коэффициентов определяется число неизвестных коэффициентов СС  $k$ . В то же время число возможных алгебраических уравнений вида (7) для расчета коэффициентов  $N_i$  и  $D_i$  определяется количеством точек  $m$  в векторной временной последовательности (8). В результате получается система из  $m$  линейных алгебраических уравнений с  $k$  неизвестными. Для решения этой системы можно использовать метод наименьших квадратов, согласно которому [10]

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a} \mathbf{X} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{a}$  — матрица коэффициентов размера  $m \times k$ ; значения элементов этой матрицы определяются в каждой  $j$ -й точке на основании выражения в левой части уравнения (7); элементы вектора  $\mathbf{b}$  вычисляются для каждого  $j$  на основании правой части уравнения (7);  $\mathbf{X}$  — вектор искомых коэффициентов  $N_i$  и  $D_i$  числителя и знаменателя СФ системы (5).

Обозначим:  $\mathbf{a}^T \mathbf{a} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{B}$ . Тогда (9) примет вид:  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , откуда

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}. \quad (10)$$

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРИГИНАЛЬНЫХ СИСТЕМ, ОТНОСЯЩИХСЯ К R-КЛАССУ

Предлагаемый алгоритм был применен к моделированию ОС, относящихся к R-классу [8], т.е. системам вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ \dot{x}_2 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_1 x_2 + c_5 x_1 x_3 + c_6 x_2 x_3. \end{cases} \quad (11)$$

СС, соответствующая ОС (11), имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = \frac{1}{D_0 + D_1 y_1 + D_2 y_2} (N_0 + N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_1^2 + N_5 y_1 y_2 + \\ + N_6 y_1 y_3 + N_7 y_2^2 + N_8 y_2 y_3 + N_9 y_3^2 + N_{10} y_1^3 + N_{11} y_1^2 y_2 + N_{12} y_1^2 y_3 + \\ + N_{13} y_1 y_2^2 + N_{14} y_1 y_2 y_3 + N_{15} y_1 y_3^2 + N_{16} y_2^3). \end{cases} \quad (12)$$

К R-классу относится ряд хаотических систем, в том числе и система Ресслера [11], которая с учетом обозначений (11) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_3 x_3 + c_5 x_1 x_3. \end{cases} \quad (13)$$

Данная система была решена методом Рунге-Кутты 4-го порядка с коэффициентами  $a_2 = a_3 = -1$ ,  $b_1 = c_5 = 1$ ,  $b_2 = 0.15$ ,  $c_0 = 0.2$ ,  $c_3 = -10$  на временном интервале 40-с с шагом 0.002-с. Временные зависимости и фазовые портреты системы (13) представлены на рис. 1.

В качестве наблюдаемой была взята переменная  $x_1$ , т.е.  $y_1(t) \equiv x_1(t)$ . Очевидно, что трехкратное численное дифференцирование временного ряда  $y_1(t) = y_1(j)$  приводит к его незначительному укорочению, т.е.  $m < N$ . Величина этого укорочения зависит от вида применяемых формул численного дифференцирования. Использовались два разных способа численного дифференцирования. Первый способ использует формулу

$$\dot{y}_i(j) = \frac{y_i(j+1) - y_i(j-1)}{2\Delta t}. \quad (14)$$

Во втором способе для каждой точки  $y_i(j)$  временной последовательности на интервале  $[j-45, j+45]$  по методу наименьших

квадратов выполняется аппроксимация временной последовательности полиномом 4-ой степени, после чего аналитически вычисляется производная от аппроксимирующего полинома. Величина этого интервала, с одной стороны, достаточно велика, чтобы обеспечить хорошее сглаживание, а с другой стороны, достаточно мала, чтобы не привести к значительному искажению формы кривых  $\dot{y}_1(t)$ ,  $\ddot{y}_1(t)$ ,  $\ddot{y}_1(t)$ .

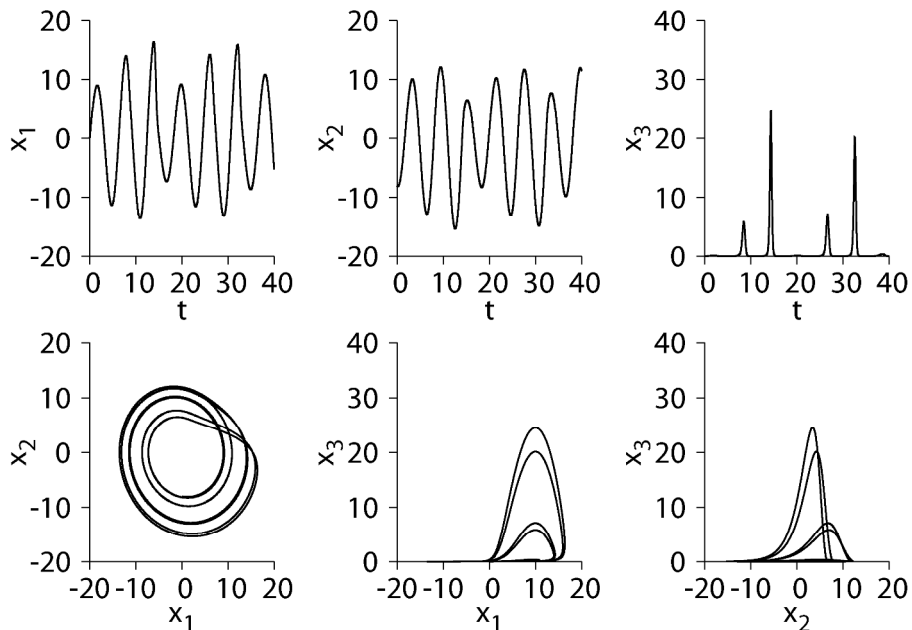


Рис. 1. Временные зависимости и фазовые портреты системы (13)

Размер матрицы  $\mathbf{a}$  с учетом укорочения при дифференцировании первым способом составил  $m \times k = 19994 \times 19$ , а при втором —  $m \times k = 19731 \times 19$ . С помощью соотношения (10) были определены значения коэффициентов СС (12), которые представлены в табл. 2. Для сравнения в таблице приведены точные значения, полученные с помощью аналитических соотношений между коэффициентами ОС и СС [8]. Из таблицы видно, что коэффициенты  $N_9, N_{13}, N_{14}, N_{15}, N_{16}$  и  $D_2$  малы, что позволяет принять их равными нулю. В этом случае система (12) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = \frac{1}{D_0 + D_1 y_1} (N_0 + N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_1^2 + N_5 y_1 y_2 + \\ + N_6 y_1 y_3 + N_7 y_2^2 + N_8 y_2 y_3 + N_{10} y_1^3 + N_{11} y_1^2 y_2 + N_{12} y_1^2 y_3). \end{cases} \quad (15)$$

Таблица. 2

Коэффициенты СС, определенные различными способами  
для переменной  $x_1(t)$  системы (13)

| Коэффициент | Расчетные значения коэффициентов |                            |                            |                            | Аналитические значения коэффициентов |
|-------------|----------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------------------------|
|             | СС (12)                          |                            | СС (15)                    |                            |                                      |
|             | Способ дифференцирования 1       | Способ дифференцирования 2 | Способ дифференцирования 1 | Способ дифференцирования 2 |                                      |
| $N_0$       | 0,02990                          | 0,05140                    | 0,02949                    | 0,02393                    | 0,03000                              |
| $N_1$       | -10,00312                        | -10,06667                  | -10,00224                  | -10,01107                  | -10,00296                            |
| $N_2$       | 0,48033                          | 0,48757                    | 0,48022                    | 0,48221                    | 0,48030                              |
| $N_3$       | -9,85017                         | -9,91567                   | -9,84924                   | -9,85755                   | -9,85000                             |
| $N_4$       | 1,98530                          | 1,99797                    | 1,98509                    | 1,98555                    | 1,98522                              |
| $N_5$       | -0,29781                         | -0,30268                   | -0,29776                   | -0,29869                   | -0,29778                             |
| $N_6$       | 1,97054                          | 1,98391                    | 1,97031                    | 1,97073                    | 1,97044                              |
| $N_7$       | 0,01478                          | 0,01512                    | 0,01478                    | 0,01490                    | 0,01478                              |
| $N_8$       | -0,09853                         | -0,10166                   | -0,09852                   | -0,09937                   | -0,09852                             |
| $N_9$       | $1,45678 \cdot 10^{-5}$          | $4,69638 \cdot 10^{-4}$    | 0                          | 0                          | 0                                    |
| $N_{10}$    | -0,09853                         | -0,09928                   | -0,09851                   | -0,09851                   | -0,09852                             |
| $N_{11}$    | 0,01478                          | 0,01519                    | 0,01478                    | 0,01476                    | 0,01478                              |
| $N_{12}$    | -0,09853                         | -0,09934                   | -0,09851                   | -0,09852                   | -0,09852                             |
| $N_{13}$    | $-2,40217 \cdot 10^{-7}$         | $-4,83136 \cdot 10^{-5}$   | 0                          | 0                          | 0                                    |
| $N_{14}$    | $2,44258 \cdot 10^{-6}$          | $2,79380 \cdot 10^{-4}$    | 0                          | 0                          | 0                                    |
| $N_{15}$    | $-1,75095 \cdot 10^{-6}$         | $-7,97295 \cdot 10^{-5}$   | 0                          | 0                          | 0                                    |
| $N_{16}$    | $-1,12451 \cdot 10^{-7}$         | $1,15990 \cdot 10^{-5}$    | 0                          | 0                          | 0                                    |
| $D_0$       | 1                                | 1                          | 1                          | 1                          | 1                                    |
| $D_1$       | -0,09852                         | -0,09856                   | -0,09852                   | -0,09850                   | -0,09852                             |
| $D_2$       | $3,93687 \cdot 10^{-7}$          | $1,50274 \cdot 10^{-6}$    | 0                          | 0                          | 0                                    |

Значения коэффициентов этой системы рассчитаны аналогично предыдущему случаю и также представлены в табл. 2. Кроме этого, для оценки точности результатов рассчитаны относительные отклонения значений коэффициентов СС, полученных численным методом, от аналитических значений. Эти отклонения, вычисленные только для ненулевых коэффициентов СС, приведены в таблице 3.

Таблица. 3

Относительные отклонения значений коэффициентов СС  
при разных способах дифференцирования

| Коэффициент | Относительные отклонения значений коэффициентов |                            |                            |                            |
|-------------|---|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
|             | СС (12)   |                            | СС (15)                    |                            |
|             | Способ дифференцирования 1                      | Способ дифференцирования 2 | Способ дифференцирования 1 | Способ дифференцирования 2 |
| $N_0$       | $3,415 \cdot 10^{-3}$                           | 0,713                      | 0,017                      | 0,202                      |
| $N_1$       | $1,625 \cdot 10^{-5}$                           | $6,369 \cdot 10^{-3}$      | $7,163 \cdot 10^{-5}$      | $8,107 \cdot 10^{-4}$      |
| $N_2$       | $5,761 \cdot 10^{-5}$                           | 0,015                      | $1,711 \cdot 10^{-4}$      | $3,969 \cdot 10^{-3}$      |
| $N_3$       | $1,709 \cdot 10^{-5}$                           | $6,667 \cdot 10^{-3}$      | $7,766 \cdot 10^{-5}$      | $7,667 \cdot 10^{-4}$      |
| $N_4$       | $4,232 \cdot 10^{-5}$                           | $6,421 \cdot 10^{-3}$      | $6,613 \cdot 10^{-5}$      | $1,674 \cdot 10^{-4}$      |
| $N_5$       | $8,461 \cdot 10^{-5}$                           | 0,016                      | $5,148 \cdot 10^{-5}$      | $3,065 \cdot 10^{-3}$      |
| $N_6$       | $5,185 \cdot 10^{-5}$                           | $6,838 \cdot 10^{-3}$      | $6,751 \cdot 10^{-5}$      | $1,483 \cdot 10^{-4}$      |
| $N_7$       | $1,669 \cdot 10^{-5}$                           | 0,023                      | $6,359 \cdot 10^{-5}$      | $8,340 \cdot 10^{-3}$      |
| $N_8$       | $1,224 \cdot 10^{-4}$                           | 0,032                      | $4,561 \cdot 10^{-5}$      | $8,630 \cdot 10^{-3}$      |
| $N_{10}$    | $7,229 \cdot 10^{-5}$                           | $7,742 \cdot 10^{-3}$      | $6,067 \cdot 10^{-5}$      | $8,065 \cdot 10^{-5}$      |
| $N_{11}$    | $8,369 \cdot 10^{-5}$                           | 0,028                      | $2,267 \cdot 10^{-4}$      | $1,055 \cdot 10^{-3}$      |
| $N_{12}$    | $9,258 \cdot 10^{-5}$                           | $8,317 \cdot 10^{-3}$      | $5,225 \cdot 10^{-5}$      | $4,433 \cdot 10^{-5}$      |
| $D_1$       | $2,869 \cdot 10^{-6}$                           | $4,302 \cdot 10^{-4}$      | $1,595 \cdot 10^{-5}$      | $2,438 \cdot 10^{-4}$      |

Как видно из таблицы, дифференцирование 1-м способом приводит к более точному результату. Это объясняется тем, что при выбранных параметрах аппроксимирующего полинома его использование приводит к некоторому искажению формы кривой, из-за чего расчетные значения коэффициентов СС больше отклоняются от точных значений.

### ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ

Как известно [12], корректность решения (10) СЛАУ зависит от числа обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$ , а именно:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \left( \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\Delta \mathbf{B}\|}{\|\mathbf{B}\|} \right), \quad (16)$$

где  $\|\cdot\|$  — норма вектора или матрицы (здесь и далее использовалась евклидова норма),  $\Delta \mathbf{X}$  — вектор отклонений решения СЛАУ,  $\Delta \mathbf{A}$  — матрица отклонений фактических значений элементов матрицы  $\mathbf{A}$  от точных,  $\Delta \mathbf{B}$  — вектор отклонений фактических значений элементов вектора  $\mathbf{B}$  от точных,  $\text{cond}(\mathbf{A})$  — число обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$ .

Матрица  $\mathbf{A}$ , полученная для системы (12), имеет  $\text{cond}(\mathbf{A})=1,341 \cdot 10^9$ , а для упрощенной системы (15) —  $\text{cond}(\mathbf{A})=5,413 \cdot 10^7$ . Хотя приведенные в табл. 2 расчетные значения коэффициентов  $N_i$  и  $D_i$  близки к аналитическим, большие значения  $\text{cond}(\mathbf{A})$  говорят о возможной неустойчивости решений.

Для оценки границ возможной неустойчивости решений было исследовано влияние точности представления чисел на результат. В предыдущем разделе рассматривалась временная последовательность  $x_1(t)$  системы (13) со значениями в интервале  $(-13,6; 16,4)$ , представленными с точностью  $d=16$  знаков после запятой. Такая точность, как правило, недостижима в результате реальных измерений. Поэтому необходимо исследовать, как уменьшение точности исходных данных повлияет на результаты, полученные с помощью предложенного алгоритма. В нашем численном эксперименте уменьшение точности осуществлялось путем отбрасывания младших разрядов для всех точек временной последовательности.

В табл. 4 приведены величины из соотношения (16), которые характеризуют ошибки результатов в зависимости от точности представления значений исходного временного ряда  $y_1(t) \equiv x_1(t)$ . Эти же результаты представлены графически в логарифмическом масштабе на рисунках 2 и 3. Как видно из табл. 4, при численном дифференцировании по формуле (14) отношение  $\|\Delta X\|/\|X\|$  становится неприемлемо большим при  $d \geq 7$  (соответствующие значения выделены в таблице жирным шрифтом). В то же время 2-й способ дифференцирования обеспечивает получение адекватных результатов при точности исходных данных меньшей на 4 порядка по сравнению с 1-м способом.

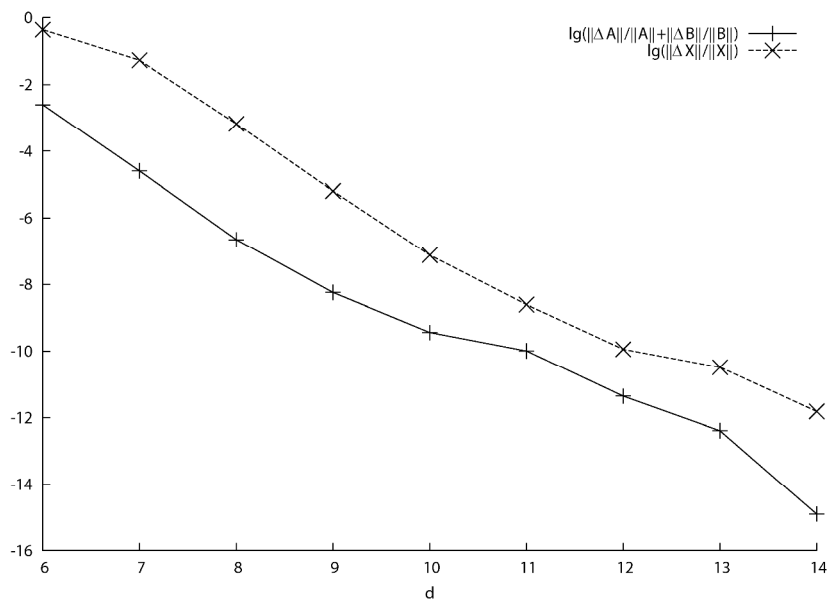


Рис. 2. Зависимости составляющих формулы (16) от точности представления исходных данных при использовании 1-го способа дифференцирования



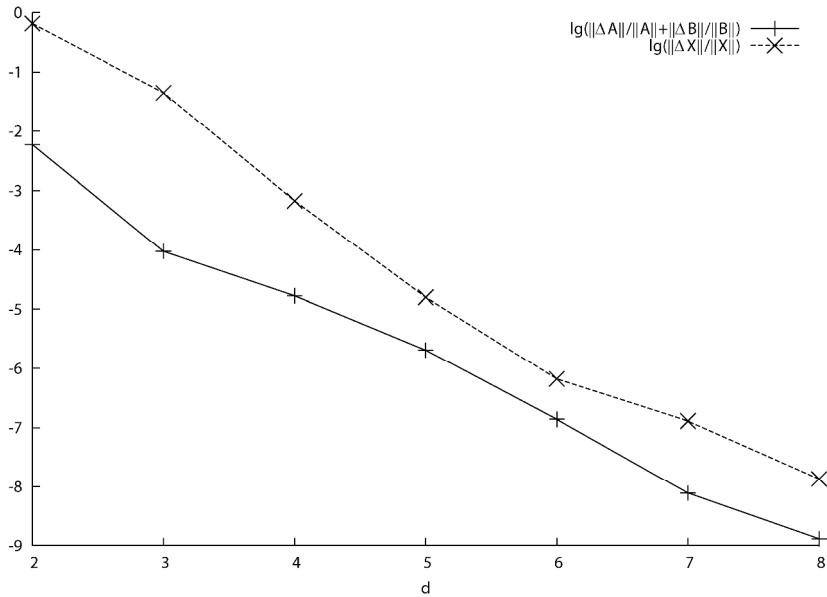


Рис. 3. Зависимости составляющих формулы (16) от точности представления при использовании 2-го способа дифференцирования

Таблица 4

Значения составляющих выражения (16) в зависимости от точности представления исходных данных

| d  | Способ дифференцирования 1                          |                              | Способ дифференцирования 2                          |                              |
|----|---|------------------------------|---|------------------------------|
|    | $\frac{\ \Delta A\  + \ \Delta B\ }{\ A\  + \ B\ }$ | $\frac{\ \Delta X\ }{\ X\ }$ | $\frac{\ \Delta A\  + \ \Delta B\ }{\ A\  + \ B\ }$ | $\frac{\ \Delta X\ }{\ X\ }$ |
| 14 | $1,259 \cdot 10^{-15}$                              | $1,538 \cdot 10^{-12}$       | -   | -                            |
| 13 | $4,075 \cdot 10^{-13}$                              | $3,257 \cdot 10^{-11}$       | -   | -                            |
| 12 | $4,407 \cdot 10^{-12}$                              | $1,149 \cdot 10^{-10}$       | -   | -                            |
| 11 | $1,016 \cdot 10^{-10}$                              | $2,483 \cdot 10^{-9}$        | -   | -                            |
| 10 | $3,661 \cdot 10^{-10}$                              | $7,516 \cdot 10^{-8}$        | -   | -                            |
| 9  | $5,687 \cdot 10^{-9}$                               | $6,326 \cdot 10^{-6}$        | -   | -                            |
| 8  | $2,233 \cdot 10^{-7}$                               | $6,601 \cdot 10^{-4}$        | $1,302 \cdot 10^{-9}$                               | $1,362 \cdot 10^{-8}$        |
| 7  | $2,526 \cdot 10^{-5}$                               | <b>0,053</b>                 | $8,071 \cdot 10^{-9}$                               | $1,291 \cdot 10^{-7}$        |
| 6  | $2,472 \cdot 10^{-3}$                               | <b>0,431</b>                 | $1,376 \cdot 10^{-7}$                               | $6,596 \cdot 10^{-7}$        |
| 5  | -   | -                            | $2,029 \cdot 10^{-6}$                               | $1,579 \cdot 10^{-5}$        |
| 4  | -   | -                            | $1,668 \cdot 10^{-5}$                               | $6,726 \cdot 10^{-4}$        |
| 3  | -   | -                            | $9,693 \cdot 10^{-3}$                               | <b>0,045</b>                 |
| 2  | -   | -                            | $5,978 \cdot 10^{-3}$                               | <b>0,65</b>                  |

Очевидно, что в нашем случае основными источниками погрешностей являются низкая точность представления значений исходного числового ряда и вычислительный шум, возникающий при численном дифференцировании. Влияние этих факторов иллюстрирует график, представленный на рис. 4, где приведен фрагмент зависимости  $\ddot{y}_1(t)$  для  $d=7$  и  $d=16$  при дифференцировании по формуле (14). При высокой точности ( $d=16$ ) график практически не имеет шума, а при низкой ( $d=7$ ) — величина шума сравнима с полезным сигналом, что приводит к значительной погрешности вектора **B** и, как следствие, к значительной ошибке результата — вектора

Х. При применении 2-го способа дифференцирования погрешность  $\ddot{y}_1(t)$  — значительно меньше и достигает величин, искажающих результат, при точности задания исходного временного ряда  $d = 3$ , что видно из рис. 5.

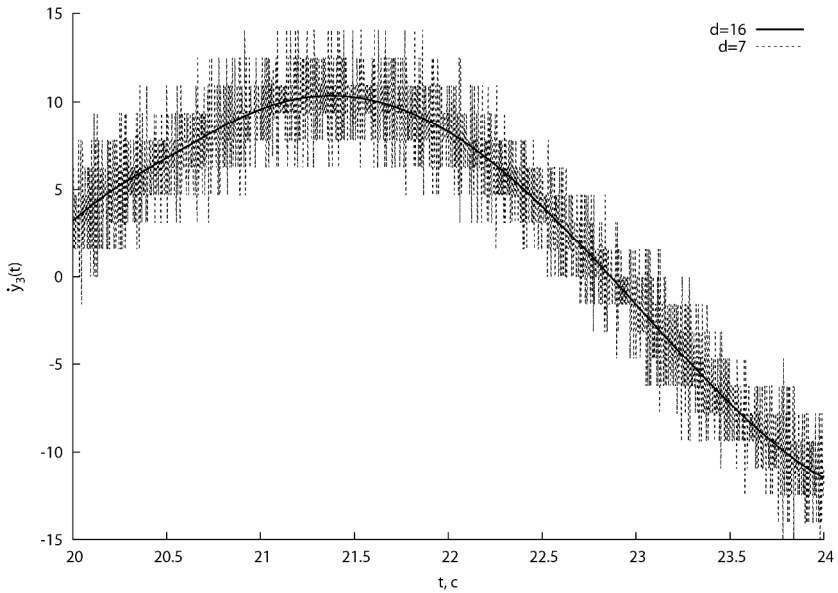


Рис. 4. Фрагмент временного ряда  $\dot{y}_3(t) \equiv \ddot{x}_1(t)$  при использовании 1-го способа дифференцирования для 2-х значений точности представления исходных данных

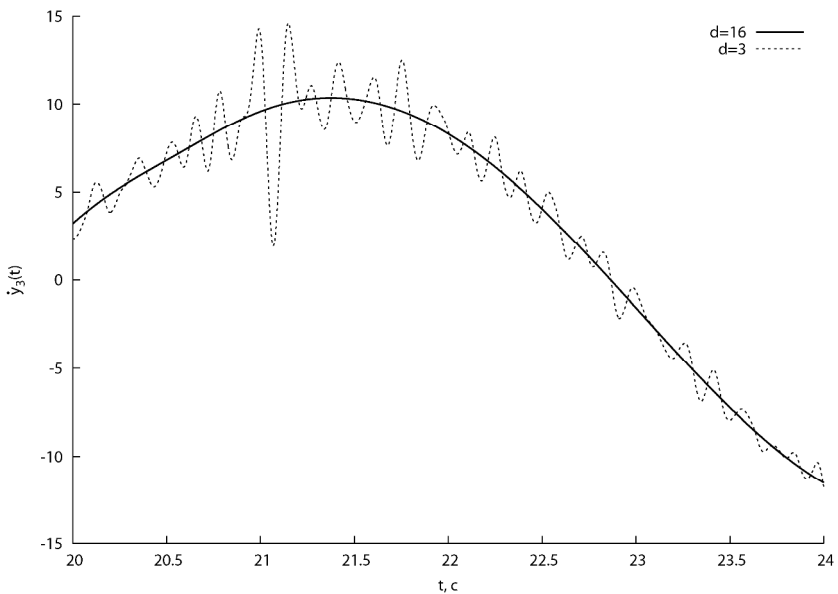


Рис. 5. Фрагмент временного ряда  $\dot{y}_3(t) \equiv \ddot{x}_1(t)$  при использовании 2-го способа дифференцирования

Следует отметить, что для рассмотренной временной последовательности при  $d = 2$  шаг дискретизации по амплитуде составляет примерно  $1/3000$  от диапазона изменения значений  $y_1(t) \equiv x_1(t)$ , что сопоставимо с точностью измерений, доступной на практике. Таким образом, используя метод численного дифференцирования, устойчивый к шумам и понижению точности, можно применить предложенный алгоритм для реконструкции реальных временных последовательностей.

## Выводы

В статье предложен алгоритм вычисления коэффициентов стандартной системы на основе временной последовательности одной наблюдаемой переменной оригинальной системы. Предлагаемый подход позволяет расширить область применения алгоритма [5] за счет возможности присвоения любым коэффициентам стандартной функции произвольных известных значений. Проведенный анализ показал значительное влияние точности представления чисел исходного временного ряда на ошибку вычислений.

Так как одной из основных операций данного алгоритма является численное дифференцирование, следует предвидеть возможное увеличение ошибок из-за этой операции. При высокой точности задания исходных данных дифференцирование с использованием простых соотношений обеспечивает меньшую погрешность определения коэффициентов стандартной системы, а при понижении точности исходных данных преимущество имеет дифференцирование с использованием аппроксимирующего полинома. Также для уменьшения вычислительного шума, появляющегося при численном дифференцировании, можно использовать сглаживание как исходной временной последовательности, так и ее производных.

Алгоритм может быть обобщен на случай дробно-рациональной стандартной функции с большим числом слагаемых. Существование систем, реконструкция которых возможна с использованием стандартной функции более общего вида, подтверждается предварительными результатами, которые будут представлены в дальнейшем.

1. Cremers J. Construction of differential equations from experimental data / J. Cremers, A. Hubler // *Naturforsch.* — 1987. — vol. 42a. — P. 797–802.
2. Breeden J. L. Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables / J. L. Breeden, A. Hubler // *Phys. Rev. A.* — 1990. — Vol. 42. — P. 5817–5826.
3. Gouesbet G. Reconstruction of standard and inverse vector fields equivalent to the Rössler system / G. Gouesbet // *Phys. Rev. A.* — 1991. — Vol. 44. — P. 6264–6280.
4. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // in: D.A. Rand, L.S. Young (Eds.), *Dynamical System and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics.* — New York : Springer. — 1981. — No. 898. — P. 366–381.
5. Gouesbet G. Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series / G. Gouesbet // *Phys. Rev. A.* — 1991. — Vol. 43. — P. 5321–5331.

6. Gouesbet G. Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L2 approximation on nets / G. Gouesbet, C. Letellier // *Phys. Rev. E.* — 1994. — Vol. 49, No. 6. — P. 4955–4972.
7. Maquet J. Scalar modeling and analysis of a 3D biochemical reaction model / J. Maquet, C. Letellier, L. A. Aguirre // *Journal of Theoretical Biology.* — 2004. — Vol. 228. — P. 421–430.
8. Gorodetskyi V. Reconstruction of chaotic systems of a certain class / V. Gorodetskyi, M. Osadchuk // *International Journal of Dynamics and Control.* — Available at: DOI 10.1007/s40435-014-0100-y.
9. Le Sceller L. Structure selection for Global vector field reconstruction by using the identification of fixed points / L. Le Sceller, C. Letellier, G. Gouesbet // *Phys. Rev. E.* — 1999. — Vol. 60, No. 2. — P. 1600–1606.
10. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения / Г. Стренг. — М. : Мир, 1980. — 459 с.
11. Rössler O. E. An equation for continuous chaos / O. E. Rössler // *Phys. Lett. A.* — 1976. — Vol. 57. — P. 397–398.
12. Форсайт Дж. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений / Дж. Форсайт, К. Молер. — М. : Мир, 1969. — 164 с.

UDC 517.925

## **ALGORITHM FOR RECONSTRUCTING THE DYNAMICAL SYSTEMS USING ONE OBSERVABLE VARIABLE**

**V.G. Gorodetskyi, M.P. Osadchuk**

*National technical university of Ukraine “Kyiv polytechnic institute”.*

**Introduction.** We consider the problem of reconstructing the system of ordinary differential equations by using one observable variable. The data under investigation is a scalar time series of some process data. It is assumed that the dynamics of the process can be described by an original system of ordinary differential equations with polynomial right-hand sides. We replace the original system by standard system of known type in which the unknown variables are replaced by derivatives of the observable variable, and one of the variables of the standard system is the same as observable variable. We use standard systems which have the ratio of polynomials with unknown coefficients in the right-hand sides.

**The purpose** of this work is to simplify and improve the accuracy of G. Gouesbet algorithm for determining the coefficients of the standard system.

**Methods.** As well as in the prototype algorithm, the time series is differentiated to find all the variables of the standard system. Then we form the system of linear algebraic equations which are solved with respect to the unknown coefficients of the standard system. The algorithm uses such novelties: ability to assign the known values for any coefficient of the standard system, solving the overdetermined algebraic system by using least square method, possibility to use different methods of differentiation.

**Results.** Algorithm was utilized to reconstruct standard system by use of one variable of Rössler system and other systems with chaotic evolution. All the results confirmed the effectiveness of the algorithm improvements.

**Conclusion.** The proposed novelties allow to improve the accuracy of computing the coefficients of the standard system and simplify the algorithm.

**Keywords:** original system, standard system, reconstructing, least square method, observable variable.

1. Cremers J., Hubler A. Construction of differential equations from experimental data. *Naturforsch*, 1987, vol. 42a, pp. 797–802.
2. Breeden J.L., Hubler A. Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables. *Phys. Rev. A*, 1990, vol. 42, pp. 5817–5826.
3. Gouesbet G. Reconstruction of standard and inverse vector fields equivalent to the Rössler system. *Phys. Rev. A*, 1991, vol. 44, pp. 6264–6280.
4. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. In: D.A. Rand, L.S. Young (Eds.), *Dynamical System and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics*. Springer, New York, 1981, no. 898, pp. 366–381.
5. Gouesbet G. Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series. *Phys. Rev. A*, 1991, vol. 43, pp. 5321–5331.
6. Gouesbet G., Letellier C. Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L2 approximation on nets. *Phys. Rev. E*, 1994, vol. 49, no. 6, pp. 4955–4972.
7. Maquet J., Letellier C., Aguirre L. A. Scalar modeling and analysis of a 3D biochemical reaction model. *Journal of Theoretical Biology*, 2004, vol. 228, pp. 421–430.
8. Gorodetskiy V., Osadchuk M. Reconstruction of chaotic systems of a certain class. *International Journal of Dynamics and Control*. Available at: DOI 10.1007/s40435-014-0100-y.
9. Le Sceller L., Letellier C., Gouesbet G. Structure selection for Global vector field reconstruction by using the identification of fixed points. *Phys. Rev. E*, 1999, vol. 60, no. 2, pp. 1600–1606.
10. Strang G. *Linear Algebra and Its Applications*. Thomson Brooks/Cole, 2006, 487 p.
11. Rössler O.E. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A*, 1976, vol. 57, pp. 397–398.
12. Forsythe G. E., Moler C.B. *Computer solution of linear algebraic systems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1967, 148 p.

Получено 30.01.2015

# Медицинская и биологическая кибернетика

УДК 681.2.087.57.089

## ОЦІНКА СТУПЕНЯ НЕГОМОГЕННОСТІ ЕЛЕКТРИЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ШЛУНОЧКАХ СЕРЦЯ ЗА ДАНИМИ МАГНИТОКАРДІОГРАФІЇ

М. Наджафіан Тумаджані<sup>1</sup>, М.М. Будник<sup>2</sup>, О.С. Коваленко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН України та МОН України*

<sup>2</sup>*Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України*

Рассмотрены методы анализа карт распределения плотности токов (РПТ), секущих сердце во фронтальной плоскости. На основе степени отличия карт РПТ от нормальной квазидипольной карты определяют степени негомогенности регионального или глобального типов. Предложен метод оценки степени аномальности РПТ, вызванной нарушениями электрических процессов в желудочках сердца.

**Ключевые слова:** карта распределения плотности токов, оценка региональной негомогенности, оценка глобальной негомогенности.

Розглянуто методи аналізу карт розподілу щільності струмів (РЩС), які січуть серце у фронтальній площині. На основі ступеня відмінності карт РЩС від нормальної квазидипольної карти визначають ступені негомогенності регіонального або глобального типів. Запропоновано метод оцінки ступеня аномальності РЩС, викликані порушеннями електричних процесів у шлуночках серця.

**Ключові слова:** карта розподілу щільності струмів, оцінка регіональної негомогенності, оцінка глобальної негомогенності.

## Вступ

На сьогодні надійна діагностика багатьох кардіологічних захворювань все ще є клінічно актуальною проблемою. Так, ЕКГ в стані спокою є нормальною у 50% випадків [1], а зміни на ній недостатньо специфічні для найбільш розповсюджених патологій, наприклад для ішемічної хвороби серця (ІХС). З іншого боку, прогностична цінність велоергометрії з точки зору виникнення значних серцево-судинних подій (інфаркт міокарду — ІМ, інсульт, раптова серцева смерть тощо) теж не є достатньо високою. Методи формування медичних зображень (комп'ютерна томографія — КТ, магнітно резонансна томографія — МРТ, ультразвукова діагностика — УЗД) не дають достатньої інформації про електрофізіологічні процеси у міокарді. Різноманітні стрес-тести та інвазивні методи (коронарна ангиографія, сцинтиграфія) пов'язані з певним ризиком для пацієнтів, а тому не можуть проводитися так часто, як це потрібно [2]. Все це приводить до того, що

приблизно у 50% випадків гострого ІМ госпіталізація є першим контактом хворого із кардіологом.

Серед методів діагностики найбільш перспективними є неінвазивні, гуманні та безпечні методи, які не спричиняють негативних впливів на людину, не мають протипоказань, а отже — можуть багатократно повторюватися в різних клінічних ситуаціях, наприклад, для моніторингу ефективності терапії чи хірургічного втручання. Магнітокардіографія (МКГ) є повністю неінвазивним та безпечним методом, який, як показано у ряді досліджень, надає додаткову інформацію порівняно з зазначеними методами діагностики [3].

Аналіз МКГ на основі дипольної моделі не дозволяє виявити окремі джерела збудження у міокарді, тому необхідно застосовувати більш складні розподілені представлення наявних джерел збудження у вигляді карт розподілу щільності струмів (РЩС) у фронтальній площині, яка січе серце на глибині залягання диполя. Карта РЩС є векторним полем, де кожен вектор відображає щільність струму у даній точці, а області карти, які мають локальні максимуми і оточені векторами меншої амплітуди, відображають окремі області електричної активності міокарду.

Перспективність використання методу МКГ для діагностики захворювань серця полягає у тому, що ніякий інший метод не дозволяє отримати напрямок та величину локальних струмів у міокарді. Розподіл потенціалу збудження можна отримати за допомогою методу картування потенціалів на поверхні тіла (ПКТ), однак реконструювати відповідний розподіл струмових джерел неможливо. Причина полягає у тому, що на розподіл електричних потенціалів на поверхні тіла впливає неоднорідність та анізотропія електропровідності різних шарів тканин та органів тіла. Крім того, розподіл електропровідності по об'єму міокарду точно не відомий, індивідуально змінюється в нормальному фізіологічному стані людини і під впливом патологій серця.

На противагу цьому, неінвазивний метод МКГ, який реєструє магнітне поле, породжене струмами у серці, дозволяє безпосередньо реконструювати розподіл щільності струмів у серці з огляду на те, що тіло людини практично магнітно однорідне [4].

**Мета:** оцінити ступінь відхилень електричних процесів в шлуночках серця на основі аналізу наборів РЩС на картах МКГ, використовуючи шлуночковий комплекс QRST, провести розрахунок ступеня їх відмінності від нормальної квазидипольної карти.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Відомо ряд методик, які ґрунтуються на властивості МКГ давати нову корисну інформацію, яка може слугувати маркером наявності певних порушень електрофізіологічних процесів у серці [5–9]. Так, у [5] розглядається спосіб діагностики ІХС, при якому ІХС класифікується на 4 ступені важкості за наявністю змін вертикальної координати (глибини залягання) ефективного диполя на протязі ST-сегменту. Патент [6] стосується діагностики таких форм ІХС, при яких є порушення процесу реполяризації,

але форма хвилі Т на ЕКГ не змінюється, а інші зміни на ЕКГ неспецифічні. З іншого боку, у [7] наведено спосіб виявлення аномальної гетерогенності при протіканні процесів де- та реполяризації міокарду на основі виділення двох під-інтервалів та визначенні відношення тривалості першого під-інтервалу до тривалості всього інтервалу.

У [8] розглядається спосіб оцінки аномальності РЩС у серці, суть якого полягає у проведенні аналізу карт РЩС та обчисленні кількості, напрямку, координат, відносної інтенсивності окремих областей струму, а також інтенсивність та геометричну форму вихорів струму. Знайдено, що у нормі протягом хвилі Т карта має вигляд квазідипольного розподілу, струмовий диполь направлений вліво-вниз (з точки зору пацієнта, на карті це відповідає напрямку вправо-вниз), а два вихори струму майже симетричні та мають правильну овальну форму. На основі ступеня відмінності вказаних показників від таких у нормального розподілу роблять висновок про можливість захворювань серця та їх тяжкість. Недолік — не приймаються до уваги області зі зниженою щільністю струму. Крім того, карти порівнюють з картою «еталонного дипольного розподілу», що є певним спрощенням тому, що карти РЩС у нормі мають певні відмінності від ідеальної дипольної моделі, а тому необхідно застосовувати поняття «нормальної квазідипольної карти» РЩС.

В [9] запропоновано спосіб діагностики, за яким обчислюється ступінь відмінності кожної карти РЩС від нормальної квазідипольної карти РЩС, потім розраховується середня величина ступенів відмінності для всіх карт з послідовності. Але методика [9] стосується тільки реполяризації шлуночків, а деполяризація не розглядається. Таким чином, на сьогодні відсутня загальна методика класифікації карт РЩС і оцінки ступеня різних видів негомогенності (регіональної, глобальної та загальної), яка може застосовуватись також і для діагностики інших хвороб, крім ІХС.

## МЕТОДИКА ОЦІНКИ НЕГОМОГЕННОСТІ

Суть методики полягає в обчисленні ступенів регіональної, глобальної та загальної негомогенностей шляхом аналізу карт РЩС у фронтальній площині. Регіональна негомогенність обраховується за допомогою топологічних параметрів областей з підвищеною та зниженою щільністю струмів — це характеристики геометричної форми та положення (локалізації) згаданих областей, наприклад кількість, координати та відносна інтенсивність, форма областей та вихорів, які їх оточують (видовження, овальність (опуклість), незв'язність, дотикання до краю карти тощо) [5].

Глобальна негомогенність визначається на основі відношення амплітуд найбільших векторів струму на вершинах зубців R і T. Мінімальна відмінність (різниця напрямків чи відношення амплітуд) між цими векторами означає, що глобальна (основа-верхівка, епікард-ендокард) послідовність реполяризації шлуночків у головних рисах повторює послідовність деполяризації у зворотному напрямку, тобто, міоцити, які деполяризуються останніми, реполяризуються першими. Помірна (велика) відмінність означає, що відмінність у послідовності розповсюдження потенціалу дії між ре- та



деполяризацією є помірною (максимальною). Визначення глобальної негомогенності засновано на відомій концепції шлуночкового градієнту Вільсона [10].

Основна ідея полягає у тому, що на основі ступеня відмінності вказаних показників від таких у дипольного розподілу формулюють висновок про можливість чи ймовірність різних видів негомогенності електричних процесів у шлуночках серця. Підгрунтя полягає у тому, що фізіологічною причиною появи вказаних областей є наявність зон міокарду з різною провідністю збудження, які можуть з'явитися внаслідок порушень електрофізіологічних процесів у міокарді, наприклад, внаслідок ішемії, запалення чи дистрофії серцевого м'язу.

Ступінь регіональної негомогенності визначають на основі відхилень значень вказаних параметрів для областей з підвищеною та пониженою щільністю струму від нормальних значень та/або ступеня відмінності даного набору карт від нормальної квазидипольної карти. Ступінь глобальної негомогенності визначають на основі відмінності амплітуд найбільших векторів струму на вершинах зубців R і T, а ступінь загальної негомогенності — на основі суми величин ступенів регіональної та глобальної негомогенностей [11].

Для досягнення достовірної класифікації карт ступені регіональної (глобальної) негомогенності оцінюють за 3-значною шкалою (малий, помірний, великий). Для більш детальної стратифікації пацієнтів ступінь загальної негомогенності (анормальності) оцінюють вже по 5-значній шкалі: низький (норма), нижче середнього (низька анормальність), середній (середня анормальність), вище середнього (висока анормальність), високий (дуже висока анормальність).

## ОЦІНКА РЕГІОНАЛЬНОЇ НЕГОМОГЕННОСТІ

Спочатку визначається рівень регіональної негомогенності. Для кожної карти вона визначається згідно 3-значної шкали — малий, помірний чи великий ступені.

На Рис. 1а подана карта РЩС з малим ступенем регіональної негомогенності.

Це означає, що карта має:

- 1) тільки одну область, де має місце максимум щільності струмів (виділена темно-сірим кольором);
- 2) вказана область охоплюється системою векторів, що мають вигляд двох близьких один до одного та симетричних вихорів струму;
- 3) вказана область розташована приблизно посередині карти;
- 4) наявні тільки дві області зі зниженою щільністю струму (виділені світло-сірим кольором), але вони невеликі за площею, не видовжені, прилягають до краю карти, а тому не вказують на регіональну негомогенність міокарду.

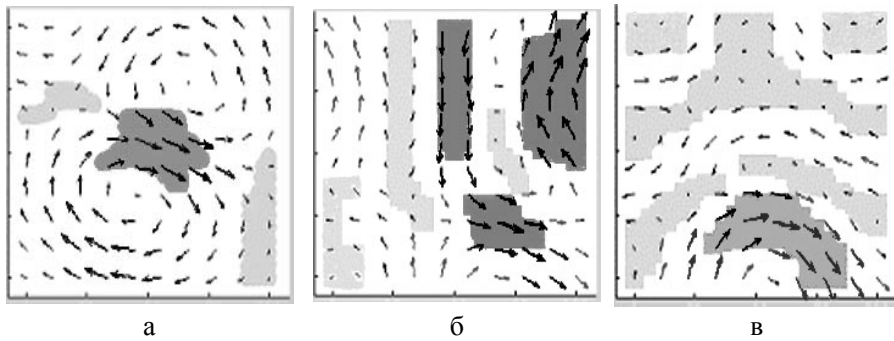


Рис. 1. Карты РЩС малого (а), помірного (б), великого (в) ступеня регіональної негомності.

Карты здорових волонтерів показують гомогенний (однорідний) РЩС, при цьому карти характеризуються властивостями 1) – 4). Тобто, існує одна основна область струму, яка охоплена симетричними векторами, знаходиться приблизно в центрі, а області зі зниженою щільністю струму невеликі за площею, не є видовженими та знаходяться тільки на краях карти.

З точки зору електрофізіології людини, це означає, що електричний генератор серця при реполяризації є розподіленим джерелом, локалізованим в межах зони, де наявне електричне збудження міокарду. Межа, що відокремлює збуджені і незбуджені зони, є фронтом хвилі збудження. При реполяризації шлуночків цей фронт у нормі направлений ліво-вниз.

В області збудження наявний градієнт трансмембранного потенціалу (ТМП), що породжує так звані «первинні струми». Ця область знаходиться у міокарді, який, з точки зору електродинаміки, є провідниковим середовищем. Тому у частині міокарда за межами області первинних струмів з'являється породжені ними пасивні об'єми (так звані вторинні) струми. У нормі міокард має досить однорідну електричну провідність. Первинні струми локалізовані в одній області, що вказує на те, що основне джерело збудження в першому наближенні є струмовим диполем. Тоді вторинні струми мають вигляд двох вихорів струму, які є приблизно симетричними, тобто однаковими за розміром та амплітудою (Рис. 1а).

Відхилення від карти з властивостями 1) – 5) спотворюють дипольну картину порівняно з «ідеальною» (при незначних порушеннях) або приводять до недипольної картини РЩС, тобто появи не менш, ніж однієї додаткової області струму з різними напрямками найбільших векторів та значних видовжених зон з пониженою щільністю струму (при значних порушеннях).

Рис. 1 б–в демонструють різні типи відхилень у порядку збільшення ступеня відмінності від «ідеальної» карти РЩС. Так, на Рис. 1б приведена карта недипольної структури з двома зонами найбільших векторів різного напрямку та двома видовженими зонами зниженої щільності струму, розташованими посередині карти. На Рис. 1в наведена карта з більш вираженою недипольною структурою — з декількома видовженими областями зниженої щільності струму, які займають більшу частину площі карти.

## ОЦІНКА ГЛОБАЛЬНОЇ НЕГОМОГЕННОСТІ

На наступному етапі обчислюється ступінь негомogeneousності (ІН). Рис. 2 демонструє карти різного ступеня глобальної негомogeneousності — карти РЩС на вершинах зубців R (а) і T (б), які відрізняються відношенням амплітуд максимальних векторів на вершинах зубців R/T. У даній реалізації прийнято, що має місце мала відмінність, якщо значення відношення амплітуди на вершині зубця R до амплітуди на вершині зубця T знаходиться в діапазоні  $4 < R/T < 6$ . При цьому помірна чи велика відмінність має місце, якщо вказане значення відношення амплітуд лежить в діапазоні, відповідно  $6 < R/T < 8$  чи  $R/T > 8$ .

Насамкінець, на основі суми ступенів регіональної та глобальної негомogeneousностей визначаються ступені загальної негомogeneousності електричних процесів у шлуночках серця, а потім — ступені аномальності вказаних процесів. Для цього застосовано 5-значну шкалу:

- 1 —  $ІН \geq R/T_{min}$  — низький ступінь загальної негомogeneousності (норма);
- 2 —  $R/T_c \geq ІН \geq R/T_{min}$  — ступінь нижче середнього, мала аномальність;
- 3 —  $ІН = R/T_c$  — середній ступінь аномальності;
- 4 —  $R/T_c \leq ІН \leq R/T_{max}$  ступінь вище середнього, висока аномальність;
- 5 —  $ІН \geq R/T_{max}$  — дуже високий ступінь аномальності.

Таблиця 1 пояснює спосіб утворення 5-значних віршувальних правил для загальної негомogeneousності та аномальності на основі двох (регіональної та глобальної) типів негомogeneousності, кожний із яких має три градації — малий (1), помірний (2) чи великий ступінь (3).

Правило визначення ступеня загальної негомogeneousності полягає в наступному: загальна негомogeneousність електричних процесів у шлуночках серця має низький чи високий ступінь, якщо регіональна та глобальна негомogeneousності мають відповідно малий чи великий ступені. У разі, якщо наявна регіональна негомogeneousність малого ступеню, а глобальна — помірного чи навпаки, діагностують ступінь загальної негомogeneousності нижче середнього. У разі, якщо наявна регіональна негомogeneousність великого ступеню, а глобальна — помірного чи навпаки, діагностують ступінь загальної негомogeneousності вище середнього. У разі, якщо наявна регіональна негомogeneousність великого ступеню, а глобальна — малого чи навпаки, чи коли обидва типи негомogeneousності мають помірний ступінь — діагностують середній ступінь загальної негомogeneousності.

$$X_1 = X_{min}, \quad X_2 = 0,4X_{max}, \quad X_3 = 0,6X_{max}, \quad X_4 = 0,8X_{max}, \quad X_5 = X_{max}$$

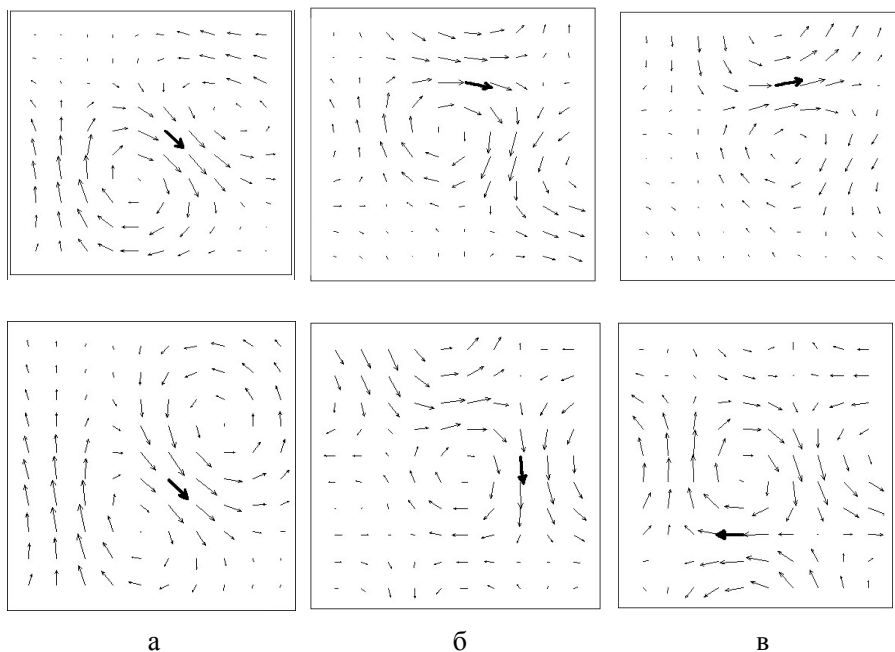


Рис. 2. Карти РЩС з малим (а), помірним (б) та великим (в) ступенем глобальної негомогенності

**Таблиця 1.**

*Правило для визначення загальної негомогенності електричних процесів*

| Ступінь глобальної негомогенності | Ступінь регіональної негомогенності |   |   |
|-----------------------------------|-------------------------------------|---|---|
|                                   | 1                                   | 2 | 3 |
| 1                                 | 1                                   | 2 | 3 |
| 2                                 | 2                                   | 3 | 4 |
| 3                                 | 3                                   | 4 | 5 |

Також пропонується правило визначення ступеня аномальності електричних процесів у шлуночках серця: 0 — аномальність відсутня (норма) чи має дуже високий ступінь, якщо регіональна та глобальна негомогенності мають відповідно малий чи великий ступені. У разі, якщо регіональна негомогенність має малий ступінь, а глобальна — помірний чи навпаки, діагностують низький ступінь аномальності. У разі, якщо наявна регіональна негомогенність великого ступеню, а глобальна — помірного чи навпаки, діагностують високий ступінь аномальності. У разі, якщо наявна регіональна негомогенність великого ступеню, а глобальна — малого чи навпаки, чи коли обидва типи негомогенності мають помірний ступінь — діагностують середній ступінь аномальності.

При цьому кожному якісному ступеню регіональної чи глобальної негомогенності поставлено у відповідність кількісний бал — від 1 до 3, а ступеням аномальності поставлено у відповідність бали в діапазоні 0–4, де бал 0 означає відсутність аномальності, тобто норму. Наприклад,

середньому ступеню аномальності (бальна оцінка 2) відповідають 3 варіанти доданків, тобто балів ступенів неоднорідності, а саме —  $0 + 2$ ,  $1 + 1$  чи  $2 + 0$ .

$$X_0 = X_{min}, \quad X_1 = 0,25X_{max}, \quad X_2 = 0,5X_{max}, \quad X_3 = 0,75X_{max}, \quad X_4 = X_{max}$$

Це дозволяє спростити визначення ступеня аномальності за допомогою простого сумування балів ступенів відповідних типів негомогенності замість застосування правил виводу на основі логічних виразів.

У даному підході застосовано магнітокардіографічне картування за 4-ма каналами, що дозволяє виконувати обстеження в умовах звичайного приміщення без використання магнітоекранованої кімнати, що значно спрощує та здешевлює впровадження МКГ технології у клінічну практику.

Таким чином, запропонована методика оцінки ступеня аномальності електричних процесів у шлуночках серця базується на проведенні МКГ картування аналізу наборів карт РЩС від початку комплексу QRS до кінця зубця Т. За цією методикою визначають ступені відмінності цих наборів карт від нормальної квазідипольної карти та приймаються до уваги області зі зниженою щільністю струму і на цій основі визначають ступінь регіональної негомогенності (РНГ) за 3-значною шкалою, потім формулюють висновок про ступінь аномальності за 5-значною шкалою.

Методика реалізована програмно, зазначені дії виконують на комп'ютері з відображення результатів аналізу на дисплеї та їх роздруківкою на принтері.

## Висновки

В роботі запропоновано методику оцінки негомогенності та аномальності електричних процесів у шлуночках серця шляхом проведення МКГ картування, аналізу наборів карт РЩС від початку комплексу QRS до кінця зубця Т, обчисленням ступенів їх відмінності від нормальної квазідипольної карти.

Перевага методу полягає в тому, що можна оцінити ступінь загальної негомогенності міокарду, і на цій основі — ступінь аномальності електричних процесів у шлуночках. Для цього використовують таку бальну шкалу ступенів регіональної та глобальної негомогенності: малий — 1, помірний — 2, великий — 3. Тоді ступеням загальної негомогенності (аномальності) можна приписати такі бали згідно 5-ти значної шкали: 0 — низький (норма), 1 — нижче середнього (мала аномальність), 2 — середній (середня аномальність), 3 — вище середнього (велика аномальність), 4 — високий (дуже висока аномальність).

Оцінка негомогенності призначена, в першу чергу, для наукових досліджень з метою виявлення електрофізіологічні відмінності в міокарді певної людини. Оцінка аномальності призначена для медичної діагностики. До переваг даного підходу відноситься також те, що він орієнтований на застосування відносно дешевого малоканалного магнітокардіографа, який дозволяє виконувати обстеження в умовах звичайного приміщення без використання магнітоекранованої кімнати, що значно спрощує та здешевлює впровадження МКГ технології у клінічну практику.

Даний метод можна застосувати до аналізу не лише карт РЩС, а й карт магнітного поля. У цьому випадку не потрібно вирішувати обернену задачу, а замість областей струму аналізуються області екстремумів магнітного поля. Проте магнітне поле дає досить опосередковану картину розподілу збудження міокарду, тому його інформативність для медичного аналізу значно нижча.

1. Connolly D.C., Elveback L.R., Oxman H.A. Coronary heart disease in residents of Rochester, Minnesota: Prognostic value of the resting electrocardiogram at the time of initial diagnosis of angina pectoris / Mayo Clin. Proc. 1984; Vol. 59. — P. 247–50.
2. Виноградова Т.С., Инструментальные методы исследования сердечно-сосудистой системы Виноградова Т.С., Акулова Ф.Д., Белоцерковский З.Б. и др., — М.: Медицина, 1986. — 416 с.
3. Complementary Nature of Electrocardiographic and Magnetocardiographic Data in Patients with Ischemic Heart Disease / J. Lant, G. Stroink, B. Voorde et al. // J. Electrocardiology. — 1990. — V.23. — P.315–322.
4. Будник М.М. Діагностичні критерії хронічної ішемічної хвороби серця на основі реєстрації та аналізу магнітокардіограм / М.М. Будник, І.Д. Войтович, В.І. Козловський та ін. // Препринт 2002-5, НАН України. Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова; — 2002. № 5. — 49 с.
5. Int. Patent Application WO 0217769, Ischemia identification, quantification and partial localization in MCG, A. Bakharev, Cardiomag Imaging Inc., USA, 2002.
6. Патент UA 74466. Спосіб діагностики ішемічної хвороби серця, Козловський В., Будник М., Стаднюк Л., Риженко Т., заявка № а 2004 021170, опубл. 15.12.2005, Бюл. №12.
7. Патент UA 13427. Спосіб оцінки гетерогенності процесів електричного збудження та відновлення у серці, Захрובה О., Будник М., Стаднюк Л. та ін., заявка № u 2006 01007, опубл. 15.03.2006, Бюл. №3.
8. Патент UA 83050. Спосіб оцінки аномальності розподілу струмів у серці, Чайковський І., Будник М., заявка № а 2006 00584, опубл. 10.06.2008, Бюл. №11.
9. Патент UA 83061. Спосіб оцінки аномальності процесу реполяризації шлуночків серця. Чайковський І., Будник М., заявка № а 2006 02821, опубл. 10.06.2008, Бюл. №11.
10. Wilson at al. The T deflection of the electrocardiogram. Trans. Assoc. Am. Physicians — vol. 46 — No. 2, — p. 19–31.
11. Патент UA 90701. Спосіб оцінки ступеня аномальності електричних процесів у шлуночках серця, Чайковський І.А., Будник М.М., Васецький Ю.М., Наджафіан М.А., заявка № а 2007 08616, опубл. 25.05.2010, Бюл. №10.

## EVALUATION OF INHOMOGENEITY DEGREE OF ELECTRICAL PROCESSES INTO THE HEART VENTRICLES BASED ON MAGNETOCARDIOGRAPHY

M. Najafian Toomajani<sup>1</sup>, M.M. Budnyk<sup>2</sup>, O.S. Kovalenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*International Research and Training Center for Information Technologies and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine and Ministry of Education and Science of Ukraine*

<sup>2</sup>*Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine*

**Introduction.** Methods for analysis of the current density distribution (CDD) maps as cross-sections of the human heart into the frontal plane were considered. Degrees of non-homogeneity of regional and global kinds are determined based on degree of difference between CDD maps and normal quasi-dipole map. Method for estimation of the abnormality degree of CDD maps caused by failures of electric processes into the heart ventricles has been proposed. Evaluation of regional and global inhomogeneity for each map is determined according to small, medium and large grades.

**Purpose.** Assess the degree of abnormality of electrical processes in the ventricles of the heart through the MCG mapping, analysis of sets of CDD maps beginning of the QRS complex to the end of the T wave, the calculation of the degree of their differences from normal quasi-dipole map.

**Methods.** Method of assessing the degree of abnormality of the CDD maps.

**Results.** In order to achieve reliable classification of the degree of regional (global) maps inhomogeneity is assessed by a 3-point scale (small, medium, large), For a more detailed stratification of patients a total degree of inhomogeneity (abnormality) has developed on a 5-value scale: low (normal), below average (small abnormality), the average (intermediate abnormality), above average (mild abnormality), large (severe abnormality).

First determine the level of regional inhomogeneity. For each map, it is determined according to the 3-value scale - small, mild and severe degree.

**Conclusion.** This method can be applied to the analysis of not only CDD maps, but also for the magnetic field maps. In this case, it is needed to solve the inverse problem, and instead of the current areas, area of the extreme of the magnetic field were analysed. However, the magnetic field gives a fairly indirect distribution pattern of excitation into the myocardium, so informative value is much lower for medical analysis.

In addition, method is preferable for using relatively cheap device, which allow make examination under normal condition without magnetically shielded room. Above factor greatly simplifies and reduces the cost of implementation of the MCG technology into clinical practice.

**Keywords:** current density distribution (CDD) map, estimation of regional inhomogeneity, estimation of global inhomogeneity.

1. Connolly D.C., Elveback L.R., Oxman H.A. *Coronary heart disease in residents of Rochester, Minnesota: Prognostic value of the resting electrocardiogram at the time of*

- initial diagnosis of angina pectoris*. MayoClin. Proc. 1984; Vol. 59, p. 247–50.
2. Vinogradova T.S. Akulova F.D., Belotserkovskiy Z.B. et al., *Instrumental methods for studying the cardiovascular system*. Moscow: Medicine, 1986. 416 p. (in Russian).
  3. Lant J., Stroink G., Voorde B. et al. Complementary Nature of Electrocardiographic and Magnetocardiographic Data in Patients with Ischemic Heart Disease. *J. Electrocardiology*. 1990. V.23, p.315–322.
  4. Budnyk M.M., Voytovych I.D., Kozlovsky V.I et al. *Diagnostic criteria for chronic ischemic heart disease based on registration and analysis magnetokardiogram*. Preprint 2002-5, NAS of Ukraine. Institute of Cybernetics named by V.M. Glushkov. 2002, № 5. 49 p. (in Ukrainian).
  5. Bakharev A. *Ischemia identification, quantification and partial localization in MCG*. Int. Patent Application WO 0217769. Cardiomag Imaging Inc., USA, 2002.
  6. Kozlovsky V., M. Budnyk, Stadnyuk L., Ryzhenko T. *Method of diagnosis of ischemic heart disease*. Patent UA 74466. Application No. a 2004 021 170, published 15.12.2005, Bulletin No. 12 (in Ukrainian).
  7. Zahrabova A., Budnyk M., Stadnyuk L. et al. *Method of estimation of processes of the heart electrical excitation and recovery*. Patent UA 13427. Application No. u2006 01007, published 15.03.2006, Bull. No. 3 (in Ukrainian).
  8. Chaikovsky I., Budnyk M. *Method for estimating abnormality of currents distribution into the heart*. Patent UA 83050. Application No. a2006 00 584, published 10.06. 2008, Bulletin No. 11 (in Ukrainian).
  9. Chaikovsky I., Budnyk M. *Method for estimating abnormality process of ventricular repolarization*. Patent UA 83061. Application No. a2006 02821, published 10.06.2008, Bull. No. 11 (in Ukrainian).
  10. Wilson at al. The T deflection of the electrocardiogram. *Trans. Assoc. Am. Physicians*, vol. 46; No. 2, – p. 19–31.
  11. Chaikovsky I., Budnyk M., Vasetsky Yu., Najafian M. *Method of estimation of the degree of abnormality of electrical processes into the heart ventricles*, Patent UA 90701. Application No. a 2007 08 616, published 25.05.2010, Bulletin No. 10 (in Ukrainian).

Получено 04.07.2014



## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ: ВЫЯВЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ МЕДИКО- ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ

М.Ю. Антомонов, С.Л. Пашинская

*ДУ «Институт гигиены и медицинской экологии им. А.Н. Марзеева НАМН  
Украины»*

В работе предложен алгоритм анализа и оценки первичных показателей с целью оптимизации их перечня для расчета интегральной оценки. Технология позволяет работать с массивами, имеющими аномальные значения и пропущенные данные. Рассмотрено поэтапное конструирование интегральной оценки. Разработан нелинейный алгоритм интегрирования показателей. Предложена методика выявления критических характеристик.

**Ключевые слова:** интегральная оценка, экологические и гигиенические данные, медицинские и экологические исследования.

У роботі запропоновано алгоритм аналізу та оцінки первинних показників з метою оптимізації їх переліку для розрахунку інтегральної оцінки. Технологія дозволяє працювати з масивами, які мають аномальні значення і пропуски в даних. Розглянуто поетапне конструювання інтегральної оцінки. Розроблено нелінійний алгоритм інтегрування показників. Запропоновано методику виявлення критичних характеристик.

**Ключові слова:** інтегральна оцінка, екологічні та гігієнічні дані, медичні та екологічні дослідження.

### ВВЕДЕНИЕ

Реформирование системы здравоохранения, ее адаптация к социально-экономическим условиям, сложившимся в Украине, требует широкого внедрения современных медицинских, информационных технологий, новых средств компьютеризации, связи, интегрированных баз данных, широкого применения математических методов анализа и прогнозирования, которые соответствовали бы общей концепции информатизации в государстве и в области здравоохранения. Согласно действующему Постановлению Кабинета Министров Украины от 17.05.2012 № 397 одним из приоритетных направлений инновационной деятельности в Украине является внедрение принципов доказательной медицины в выполнение научных исследований и при проведении анализа базовых показателей здоровья населения. Доказательную медицину определяют как новейшую технологию сбора, анализа, синтеза и применения научной медицинской информации, которая позволяет принимать оптимальные клинические решения. Эколого-гигиенические характеристики объектов окружающей среды, социально-экономическая ситуация регионов, популяционные показатели здоровья населения, уровень индивидуального здоровья необходимо исследовать как единую систему, сформированную на основе интеграции процессов сбора, обработки, анализа и распространения всей статистической информации.

Объем этой информации, доступ к которой возможен с помощью современных интернет-технологий, может быть чрезвычайно велик.

В частности, такие огромные массивы данных содержатся в базах: «Здоровье для всех» (ВООЗ), «Экологический мониторинг», «ДунаMed», «Федеральный информационный фонд данных социально-гигиенического мониторинга» (Российская Федерация) и другие. Количество показателей, которые характеризуют экологические и медицинские системы, может быть от нескольких сотен до нескольких тысяч. При анализе таких объемов информации необходимо применять различные математические приемы свертки и агрегации данных. Одним из эффективных путей снижения размерности массивов данных является использование комплексных показателей (КП) и интегральных оценок (ИО).

**Целью** нашей работы является разработка методики, алгоритмов, расчетных формул и программной реализации для решения обратной задачи интегрального оценивания — выявления дестабилизирующих факторов в уже имеющейся оценке медико-экологической ситуации.

Реализация поставленной цели предполагает постановку и решение поэтапных задач, отражающих логическую структуру и последовательность исследования.

### **ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Для комплексного оценивания качества среды в медико-экологических исследованиях применяются разнообразные математические конструкции, чаще всего представляющие собой средневзвешенные суммы значений выраженности всех регистрируемых вредных факторов. Одним из подходов построения КП является предложенная нами информационная технология интегрального оценивания. Эта технология была апробирована на разнообразных массивах медицинской, экологической и гигиенической информации, подготовлены соответствующие программные модули и выполнена верификация подхода. Таким образом, конечному пользователю в автоматизированном режиме могут быть представлены массивы КП с их интегральной оценкой.

Однако, при содержательном анализе уже сформированных комплексных показателей естественным образом возникает обратная задача: за счет каких составляющих (факторов среды) эти показатели приобретают экстремальные (наиболее опасные) значения и как выявить эти переменные по уже имеющимся КП.

### **ФОРМИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПО МЕДИКО-ЭКОЛОГИЧЕСКИМ ДАННЫМ**

Этап начинается с экспресс-обработки массива данных. Обработка массива начинается с дескриптивного анализа (расчет параметрических характеристик). Следующий шаг — логический анализ, позволяющий сделать определенные предположения о данном массиве и, при необходимости, его скорректировать.

Проверка на соответствие экспериментального распределения нормальному распределению позволяет определить методы обработки

(параметрические или непараметрические). Существуют простые методы проверки на принадлежность к нормальному распределению и сложные критерии согласия. Целесообразно для большей достоверности выполнять проверку несколькими методами [1]. Однако, наиболее приемлемым, на наш взгляд, для этих целей является критерий Колмогорова. В отличие от чаще применяемого критерия согласия Пирсона, использовать который рекомендуется на достаточно больших выборках, критерий Колмогорова менее чувствителен к объему выборки. Он не требует использования таблиц, а потому более простой в программной реализации. Дополнительно рекомендуется проводить проверку по числам Вестергарда.

В дальнейшем осуществляется проверка исходного массива на наличие выбросов и их анализ. Если аномальные значения являются грубыми ошибками, их необходимо выбраковать. Если эти значения являются так называемыми «мягкими выбросами», они могут быть информативными и сигнализировать о реальных отклонениях в экологической ситуации конкретных населенных мест. При этом критерием определения типа выбросов является величина заранее выбранного сигмального отклонения. Для выявления аномальных значений можно использовать различные методы в зависимости от объема выборки и вида распределения. Экспериментальная проверка показала, что целесообразнее на малых и средних выборках использовать метод Граббса. На больших объемах рекомендуется применять метод Райта в сочетании с непараметрическим методом по определению межквартильного интервала.

Также данные проверяются на комплектность. При обработке массивов с неполными данными существует два подхода — удаление некомплектных фрагментов и восстановление пропущенных данных [2, 3]. Однако при восстановлении данных уменьшается точность расчетов, при удалении теряется репрезентативность выборки. Удаление целесообразно тогда, когда пустоты в таблице составляют значительный процент (определяется пользователем, в зависимости от требований поставленной задачи) от объема выборки, например, 20%. Самый простой (хотя и не очень точный) метод, который чаще всего используется в статистических пакетах, — заполнение пропусков средними значениями величин, находящихся в данном столбце. В нашей работе использована линейная интерполяция. При этом строились линейные регрессионные модели для смежных столбцов с полностью заполненными данными (аргумент функции), по которым рассчитывались недостающие элементы (значения функции).

Следующий шаг — отбор информативных характеристик. Эта процедура может выполняться как с помощью формальных математических методов (например, в рамках факторного анализа), так и с помощью экспертного оценивания.

На этом этапе также рассчитываются весовые коэффициенты при переменных, которые определяются их значимостью [4, 5].

Одним из средств уменьшения размерности массива является формирование индексов и обобщенных показателей, которые представляют собой объединение по определенным правилам множества исходных переменных в одну характеристику. Информативность, точность и

достоверность комплексного показателя зависит от правильного выбора метода обработки данных в зависимости от общей постановки задачи. Комплексные показатели, в свою очередь, могут быть использованы для интегральной оценки объекта исследования.

Процесс конструирования ИО предполагает выполнение следующих действий: 1) выбор или расчет «нормы» показателей; 2) расчет безразмерных эквивалентов; 3) нормирование показателей или их эквивалентов; 4) формирование интегральных оценок [6].

1. В качестве «нормы» можно использовать статистические характеристики имеющихся эмпирических выборок: средние, минимальные и максимальные значения и т. д. При этом следует учитывать относительный характер этих значений, поскольку они изменяются при изменении исходного массива данных. В качестве «нормы» могут использоваться некоторые «внешние» характеристики: фоновые или критические значения показателей, гигиенически допустимые уровни факторов, справочные значения и т. д. [7].

2. Безразмерные эквиваленты получаются путем деления исходных значений массива на соответствующую «норму» или показатели вариабельности, измеренные в тех же единицах, что и сами переменные.

3. Нормирование данных применяется для того, чтобы все значения признаков попадали в удобный для сравнения диапазон. Обычно это интервал  $[0, 1]$ . При этом надо сразу определить смысловую направленность: значение показателей тем «больше», чем они «лучше» или наоборот. Естественно, одной и той же логике должно подчиняться преобразование для всех переменных.

В зависимости от особенностей характера изменения показателя при разных способах нормировки можно получить максимальные значения эквивалентов (например, равные единице) для средних («наиболее нормальных»), минимальных («наиболее плохих») или, наоборот, максимальных («наиболее хороших») значений исходных переменных.

Нами для нормирования была выбрана экспоненциальная функция «полуколокол» [1], которая записывалась в следующем виде:

$$\tilde{x} = \exp(-a(x - x^*)^2), \quad (1)$$

где  $x$  — значение исходной переменной,  $a$  — параметр, определяющий форму «колокола» (его «ширину»),  $x^*$  — стандарт, который мы принимаем как минимальное, максимальное или эталонное значение в зависимости от того, какие характеристики для системы оптимальные.

По этой формуле нормированные эквиваленты «плохих» значений приближаются к нулю, но не достигают его. «Наилучшие» значения равны единице.

4. Конкретный вид функции свертки нормированных показателей состояния исследуемого объекта при расчете интегральной оценки зависит от вида решаемой задачи и требований, предъявляемых к результату. Наиболее удобный и часто употребляемый способ интегрирования показателей — аддитивная линейная свертка с учетом весовых коэффициентов. Иногда при

расчете интегральной оценки обращаются к методу геометрической средней, методу коэффициентов, методу суммы мест, методу расстояний. Их целесообразно применять лишь при относительно малом числе оцениваемых показателей и в случае, если большинство их значений близки к единице.

Линейная свертка, однако, корректна только тогда, когда все критерии попарно независимы по предпочтению, проверка чего на практике почти невозможна при большом наборе критериев [8]. В противном случае в интегральном оценивании возможна компенсация низких значений показателей высокими.

## **ВЫЯВЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОЦЕНКАМ**

Часто в процессе медико-экологического анализа возникает задача определения таких элементов, которые значительно ухудшают состояние объекта, но не выявляются при интегральном оценивании, назовем эти элементы слабым звеном интегральной оценки. Предлагается сформировать корректирующую интегральную оценку, значение которой будет смещаться в сторону слабого звена. Имея рассчитанные интегральные оценки — основную и корректирующую, мы можем решить обратную задачу интегрального оценивания.

Таким образом, под критическими значениями понимаются такие, из-за которых интегральные оценки принимают «наихудшие» значения.

Алгоритм реализуется следующим образом:

1. Расчет средневзвешенных оценок исследуемых объектов по нормированным эквивалентам:

$$I_1 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad (2)$$

где  $I_1$  — интегральная средневзвешенная оценка,  $\tilde{x}_i$  — нормированные эквиваленты,  $w_i$  — весовые коэффициенты.

2. Расчет корректирующих интегральных оценок. Этот шаг был реализован тремя вариантами.

В первом варианте рассчитывались «классические» смещенные интегральные оценки по формуле средневзвешенной арифметической:

$$I_{2(1)} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (\tilde{x}_i - \tilde{x}_{\min})}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad (3)$$

где  $I_{2(1)}$  — смещенная интегральная средневзвешенная оценка,  $\tilde{x}_i$  — нормированные эквиваленты,  $\tilde{x}_{\min}$  — минимальное значение эквивалента,  $w_i$  — весовые коэффициенты.

Во втором варианте рассчитывались интегральные оценки по формуле средневзвешенной геометрической:

$$I_{2(2)} = \left( \prod_{i=1}^n \tilde{x}_i^{w_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}}, \quad (4)$$

где  $I_{2(2)}$  — средневзвешенная геометрическая оценка,  $\tilde{x}_i$  — нормированные эквиваленты,  $w_i$  — весовые коэффициенты.

Третий вариант — расчет смещенных интегральных оценок как корня из произведения минимального эквивалента и средневзвешенной суммы:

$$I_{2(3)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i \tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \cdot \tilde{x}_{\min}}, \quad (5)$$

где  $I_{2(3)}$  — смещенная интегральная оценка,  $\tilde{x}_{\min}$  — минимальный эквивалент, соответствующий худшему показателю.

3. Сравнение средневзвешенной и смещенной интегральных оценок. Если набор показателей, характеризующих объект, относительно однородный, различие между оценками  $I_1$  и  $I_2$  будет незначительным. Если же различие существенно, то показатель, эквивалент которого минимальный, является «слабым звеном» среди всех характеристик объекта. Если же хотя бы один из эквивалентов частных показателей равен нулю, то, очевидно, будет равной нулю интегральная оценка  $I_2$  во втором и третьем вариантах. Состояние объекта в этом случае будет считаться наихудшим. Аналогично агрегируя показатели по группе исследуемых объектов, получаем общую интегральную оценку. Полученное значение переводим в балльную шкалу и присваиваем соответствующим уровням шкалы вербальную оценку с градациями: «нормальный», «удовлетворительное», «плохой», «очень плохой» и «критический» (соответствует значению «0»). Осуществляя итерацию и изымая каждый раз очередной минимальный эквивалент, обнаружим все дестабилизирующие факторы объекта.

## ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЕДЛОЖЕННОГО АЛГОРИТМА

Программная реализация «Экспресс-анализ» является объединением отдельных модулей, предназначенных для оперативной предварительной обработки таблиц первичных данных с последующим конструированием интегральной оценки, и разработана в среде MS Excel средствами встроенного языка макросов Visual Basic for Application (VBA).

С помощью предложенной программной реализации был обработан массив данных Госсанэпидемслужбы Ровенской области, который содержит медицинские и демографические показатели, а также санитарно-гигиенических показатели состояния систем водоснабжения атмосферного воздуха области. Рассмотрим соотношения построенных нами различных вариантов интегральных оценок (таблица 1).

**Таблица 1.**

*Сравнительная таблица интегральных оценок медико-экологического состояния районов Ровенской области*

| №  | Название района       | Интегральные оценки |            |            |            |                  |                  |                  |                  |                  |                  |
|----|-----------------------|---------------------|------------|------------|------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
|    |                       | $I_1$               | $I_{2(1)}$ | $I_{2(2)}$ | $I_{2(3)}$ | $I_1 - I_{2(1)}$ | $I_1 / I_{2(1)}$ | $I_1 - I_{2(2)}$ | $I_1 / I_{2(2)}$ | $I_1 - I_{2(3)}$ | $I_1 / I_{2(3)}$ |
| 1  | Березновский          | 0,82                | 0,46       | 0,80       | 0,54       | 0,36             | 1,77             | 0,02             | 1,03             | 0,28             | 1,52             |
| 2  | Владимирецкий         | 0,85                | 0,59       | 0,82       | 0,48       | 0,27             | 1,45             | 0,03             | 1,03             | 0,38             | 1,79             |
| 3  | Гошанский             | 0,77                | 0,57       | 0,73       | 0,39       | 0,20             | 1,34             | 0,04             | 1,06             | 0,38             | 1,98             |
| 4  | Демидовский           | 0,84                | 0,46       | 0,81       | 0,57       | 0,38             | 1,83             | 0,03             | 1,04             | 0,27             | 1,48             |
| 5  | Дубенский             | 0,88                | 0,38       | 0,86       | 0,66       | 0,50             | 2,33             | 0,02             | 1,02             | 0,21             | 1,32             |
| 6  | Дубровицкий           | 0,88                | 0,56       | 0,85       | 0,54       | 0,32             | 1,58             | 0,03             | 1,04             | 0,35             | 1,65             |
| 7  | Заречненский          | 0,69                | 0,50       | 0,63       | 0,37       | 0,20             | 1,39             | 0,06             | 1,10             | 0,33             | 1,88             |
| 8  | Здолбуновский         | 0,71                | 0,42       | 0,66       | 0,45       | 0,29             | 1,68             | 0,04             | 1,06             | 0,26             | 1,57             |
| 9  | <b>Корецкий</b>       | 0,68                | 0,59       | 0,55       | 0,26       | <b>0,10</b>      | <b>1,16</b>      | <b>0,13</b>      | <b>1,24</b>      | <b>0,43</b>      | <b>2,67</b>      |
| 10 | Костопольский         | 0,76                | 0,54       | 0,70       | 0,41       | 0,22             | 1,40             | 0,06             | 1,09             | 0,35             | 1,86             |
| 11 | Млиновский            | 0,83                | 0,45       | 0,79       | 0,55       | 0,37             | 1,82             | 0,03             | 1,04             | 0,27             | 1,49             |
| 12 | Острожский            | 0,81                | 0,58       | 0,73       | 0,42       | 0,22             | 1,38             | 0,08             | 1,11             | 0,38             | 1,90             |
| 13 | <b>Радивилловский</b> | 0,80                | 0,64       | 0,71       | 0,36       | <b>0,16</b>      | <b>1,25</b>      | <b>0,09</b>      | <b>1,12</b>      | <b>0,44</b>      | <b>2,23</b>      |
| 14 | Ровенский             | 0,92                | 0,56       | 0,91       | 0,58       | 0,37             | 1,65             | 0,02             | 1,02             | 0,34             | 1,59             |
| 15 | Рокитновский          | 0,77                | 0,54       | 0,70       | 0,42       | 0,23             | 1,43             | 0,07             | 1,10             | 0,35             | 1,83             |
| 16 | Сарненский            | 0,85                | 0,40       | 0,84       | 0,62       | 0,45             | 2,14             | 0,01             | 1,01             | 0,23             | 1,37             |

По результатам сравнения оценок видно, что наименьшие различия средневзвешенной оценки ( $I_1$ ) и «классической» смещенной ( $I_{2(1)}$ ), и напротив, наибольшие различия средневзвешенной оценки с двумя другими вариантами  $I_{2(2)}$  и  $I_{2(3)}$  указывают на одни и те же районы — Корецкий и Радивилловский. В этих районах предположительно и находятся потенциально опасные факторы, которые могут значительно ухудшать состояние исследуемых объектов, но при этом не выявляться в средневзвешенной оценке.

Недостаток первого варианта — «классическая» смещенная оценка не реагирует на наличие нулевого эквивалента, который указывает на критическое состояние объекта. Средневзвешенная геометрическая оценка более информативна, но создает определенные сложности в вычислениях. Третий вариант, комбинированная свертка, проще в расчетах и содержит в своей конструкции минимальный элемент, по которому мы определяем потенциально опасный фактор, и таким образом решаем обратную задачу.

Рассмотрим подробнее процедуру выявления проблемных районов Ровенской области на примере заболеваемости. Проанализируем соотношение интегральных оценок — средневзвешенной и смещенной комбинированной (таблица 2).

**Таблица 2.**

*Оценки районов Ровенской области по заболеваемости населения*

| №  | Название района | Статистические характеристики |       |            |       |                    |                  |
|----|-----------------|-------------------------------|-------|------------|-------|--------------------|------------------|
|    |                 | $I_1$                         | Ранг1 | $I_{2(3)}$ | Ранг2 | Состояние          | $I_1 / I_{2(3)}$ |
| 1  | Березновский    | 0,57                          | 15    | 0,26       | 15    | плохое             | <b>2,19</b>      |
| 2  | Владимирецкий   | 0,79                          | 3     | 0,62       | 1     | удовлетворительное | 1,27             |
| 3  | Гошанский       | 0,63                          | 11    | 0,41       | 11    | плохое             | 1,54             |
| 4  | Демидовский     | 0,68                          | 9     | 0,49       | 4     | плохое             | 1,39             |
| 5  | Дубенский       | 0,81                          | 1     | 0,42       | 9     | плохое             | 1,93             |
| 6  | Дубровицкий     | 0,67                          | 10    | 0,47       | 5     | плохое             | 1,43             |
| 7  | Заречненский    | 0,59                          | 13    | 0,25       | 16    | плохое             | <b>2,36</b>      |
| 8  | Здолбуновский   | 0,73                          | 8     | 0,41       | 10    | плохое             | 1,78             |
| 9  | Корецкий        | 0,54                          | 16    | 0,28       | 14    | плохое             | 1,93             |
| 10 | Костопольский   | 0,74                          | 6     | 0,47       | 6     | плохое             | 1,57             |
| 11 | Млиновский      | 0,79                          | 2     | 0,54       | 2     | удовлетворительное | 1,46             |
| 12 | Острожский      | 0,74                          | 7     | 0,46       | 8     | плохое             | 1,61             |
| 13 | Радивилловский  | 0,74                          | 5     | 0,46       | 7     | плохое             | 1,61             |
| 14 | Ровенский       | 0,61                          | 12    | 0,40       | 12    | плохое             | 1,53             |
| 15 | Рокитновский    | 0,76                          | 4     | 0,50       | 3     | удовлетворительное | 1,52             |
| 16 | Сарненский      | 0,58                          | 14    | 0,31       | 13    | плохое             | 1,87             |

В Березновском и Заречненском районах значение  $ИО_1$  более чем в два раза превышает значение  $ИО_2$ . Это свидетельствует о том, что помимо общего плохого состояния, некоторые заболевания вызывают особое опасение. Какие именно показатели настораживают, можно определить по таблице эквивалентов: в проблемных районах это будут те показатели, которым соответствуют наименьшие эквиваленты.

В таблице 3 показан фрагмент массива показателей по следующим заболеваниям: инфекционные и паразитарные болезни (ИП), новообразования (Н), болезни крови и кроветворных органов (ККО), болезни эндокринной системы (ЭС), расстройства психики и поведения (РПП), болезни нервной системы (НС), болезни глаза и придаточного аппарата (ГПА), болезни уха и сосцевидного отростка (УСО), болезни системы кровообращения (СК), болезни органов дыхания (ОД), болезни органов пищеварения (ОП), болезни кожи и подкожной клетчатки (КПК).

Анализ нормированных эквивалентов показателей заболеваемости (таблица 3) и определение их минимальных значений на проблемных территориях указывает на то, что особое беспокойство вызывают новообразования (Н) в Дубенском районе, болезни крови и кроветворных органов (ККО) в Березновском и эндокринной системы (ЭС) в Заречненском районах.



Таблица 3.

Выявление опасных уровней заболеваемости населения районов Ровенской области

| №  | Название района | Показатели заболеваемости |             |             |             |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|-----------------|---------------------------|-------------|-------------|-------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|    |                 | ИП                        | Н           | ККО         | ЭС          | РПП  | НС   | ГПА  | УСО  | СК   | ОД   | ОП   | КПК  |
| 1  | Березновский    | 0,69                      | 0,86        | <b>0,12</b> | 0,36        | 0,88 | 0,92 | 0,47 | 0,76 | 0,51 | 0,88 | 0,16 | 0,56 |
| 2  | Владимирецкий   | 0,91                      | 0,73        | 0,68        | 0,75        | 1,00 | 0,91 | 0,62 | 0,84 | 1,00 | 1,00 | 0,63 | 0,75 |
| 3  | Гошанский       | 0,45                      | 0,40        | 0,83        | 0,77        | 0,52 | 0,43 | 0,96 | 0,80 | 0,33 | 0,35 | 0,32 | 0,78 |
| 4  | Демидовский     | 0,96                      | 0,68        | 0,76        | 0,59        | 0,40 | 0,83 | 0,36 | 0,88 | 0,96 | 0,70 | 0,37 | 0,99 |
| 5  | Дубенский       | 0,51                      | <b>0,22</b> | 1,00        | 1,00        | 0,49 | 0,99 | 1,00 | 1,00 | 0,90 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |
| 6  | Дубровицкий     | 0,82                      | 0,42        | 0,87        | 0,60        | 0,88 | 1,00 | 0,42 | 0,60 | 0,43 | 0,86 | 0,73 | 0,99 |
| 7  | Заречненский    | 0,13                      | 0,95        | 0,55        | <b>0,11</b> | 0,26 | 0,32 | 0,68 | 1,00 | 0,30 | 0,99 | 0,60 | 0,44 |
| 8  | Здолбуновский   | 0,74                      | 0,24        | 0,34        | 0,77        | 0,34 | 0,97 | 0,97 | 0,95 | 0,55 | 0,94 | 0,93 | 0,88 |
| 9  | Корецкий        | 0,80                      | 0,66        | 0,69        | 0,23        | 0,23 | 0,84 | 0,39 | 0,21 | 0,65 | 0,59 | 0,52 | 0,95 |
| 10 | Костопольский   | 0,94                      | 0,81        | 0,95        | 0,75        | 0,50 | 1,00 | 0,45 | 0,55 | 0,56 | 1,00 | 0,68 | 0,95 |
| 11 | Млиновский      | 0,38                      | 0,87        | 0,97        | 0,91        | 0,72 | 0,99 | 0,81 | 0,89 | 0,96 | 0,61 | 0,73 | 0,72 |
| 12 | Острожский      | 0,96                      | 0,73        | 0,81        | 0,84        | 0,49 | 0,91 | 0,29 | 0,92 | 0,66 | 0,61 | 0,52 | 0,61 |
| 13 | Радивилловский  | 0,58                      | 0,76        | 0,96        | 0,75        | 0,30 | 0,88 | 0,42 | 0,42 | 0,97 | 0,91 | 0,73 | 0,66 |
| 14 | Ровенский       | 1,00                      | 0,98        | 0,61        | 0,59        | 0,61 | 0,56 | 0,55 | 0,33 | 0,74 | 0,27 | 0,31 | 0,46 |
| 15 | Рокитновский    | 0,82                      | 1,00        | 0,84        | 0,50        | 0,38 | 0,37 | 0,96 | 0,82 | 1,00 | 0,64 | 0,67 | 1,00 |
| 16 | Сарненский      | 0,69                      | 0,88        | 0,78        | 0,72        | 0,17 | 0,55 | 0,43 | 0,63 | 0,68 | 0,77 | 0,20 | 0,24 |

Аналогично проведем анализ уровня загрязненности атмосферного воздуха в Ровенской области (таблица 4). Из анализа исключены Березновский, Демидовский, Острожский и Радивилловский районы из-за недостатка данных.

Таблица 4.

Анализ состояния атмосферного воздуха

| №  | Название района | Статистические характеристики |       |            |       |                     |                |
|----|-----------------|-------------------------------|-------|------------|-------|---------------------|----------------|
|    |                 | $I_1$                         | Ранг1 | $I_{2(3)}$ | Ранг2 | Состояние           | $I_1/I_{2(3)}$ |
| 1  | Березновский    | –                             | –     | –          | –     | –                   | –              |
| 2  | Владимирецкий   | 0,77                          | 9     | 0,52       | 9     | удовлетворительное  | 1,48           |
| 3  | Гошанский       | 0,90                          | 6     | 0,69       | 6     | удовлетворительное  | 1,30           |
| 4  | Демидовский     | –                             | –     | –          | –     | –                   | –              |
| 5  | Дубенский       | 0,80                          | 8     | 0,52       | 8     | удовлетворительное  | 1,54           |
| 6  | Дубровицкий     | 0,92                          | 5     | 0,81       | 5     | нормальное          | 1,14           |
| 7  | Заречненский    | 0,94                          | 4     | 0,85       | 4     | нормальное          | 1,11           |
| 8  | Здолбуновский   | 0,70                          | 10    | 0,47       | 10    | плохое              | 1,49           |
| 9  | Корецкий        | 0,95                          | 3     | 0,85       | 3     | нормальное          | 1,12           |
| 10 | Костопольский   | 0,59                          | 12    | 0,00       | 12    | <b>критическое!</b> | –              |
| 11 | Млиновский      | 0,60                          | 11    | 0,00       | 12    | <b>критическое!</b> | –              |
| 12 | Острожский      | –                             | –     | –          | –     | –                   | –              |
| 13 | Радивилловский  | –                             | –     | –          | –     | –                   | –              |
| 14 | Ровенский       | 0,98                          | 1     | 0,92       | 1     | нормальное          | 1,07           |
| 15 | Рокитновский    | 0,96                          | 2     | 0,86       | 2     | нормальное          | 1,12           |
| 16 | Сарненский      | 0,87                          | 7     | 0,63       | 7     | удовлетворительное  | 1,38           |

Из таблицы видно, что ранги по двум интегральным оценкам одинаковы и значения  $IO_1$  и  $IO_2$  существенно не отличаются, за исключением Костопольского и Млиновского районов, состояние которых определено как критическое. Критическое состояние Костопольского района вызвано содержанием в воздухе диоксида азота и фенола в концентрациях,

превышающих предельную допустимую. В Млыновском районе недопустимая концентрация формальдегида и сажи.

Результат обработки позволил ранжировать районы Ровенской области, исходя из значений интегральных оценок, определить районы с наиболее неблагоприятной экологической обстановкой и уровнем заболеваемости, выявить дестабилизирующие факторы в данных районах.

## **Выводы**

Предложенный алгоритм позволяет оперативно осуществить обработку массива данных, привести его к формату, удобному для дальнейшего более детального анализа и формирования интегральной оценки.

По результатам выполнения первой задачи (определение интегральных оценок) можно провести ранжирование эколого-гигиенических объектов, исходя из интегральных оценок; определить объекты с наиболее неблагоприятной экологической обстановкой и уровнем заболеваемости.

Решение второй задачи (расчет смещенных интегральных показателей) позволяет: выявить критические элементы в системе показателей; сдвинуть средневзвешенную оценку в сторону слабого звена системы; трансформировать результаты в бальную шкалу и сформировать вербальную оценку.

1. Лемешко Б.Ю. Исследование особенностей и мощности некоторых критериев нормальности / Б.Ю. Лемешко, А.П. Рогожников // *Метрология*. — 2009. — № 4. — С. 3–24.
2. Васильев В.И. Восстановление пропущенных данных в эмпирических таблицах / В.И. Васильев, А.И. Шевченко // *Искусственный интеллект*. — 2003. — № 3. — С. 317–324.
3. Злоба Е. Статистические методы восстановления пропущенных данных / Е. Злоба, И. Яцкив // *Computer Modeling & New Technologies*. — 2002. — Vol. 6. — № 1. — С. 51–61.
4. Бакуменко Л.П. Интегральная оценка качества и степени экологической устойчивости окружающей среды региона (на примере Республики Марий Эл) / Л.П. Бакуменко, П.А. Коротков // *Прикладная эконометрика*. — 2008. — № 1(9). — С. 73–92.
5. Павлов С.Б. Экологічний ризик для здоров'я населення / С.Б. Павлов // *Медицинские исследования*. — 2001. — Т. 1, вып. 1. — С. 16–19.
6. Антомонов М.Ю. Математическая обработка и анализ медико-биологических данных / М.Ю. Антомонов. — Киев, 2006. — 558 с.
7. Шуйский В.Ф. Количественная оценка и нормирование сложных антропогенных воздействий на макрозообентос / В.Ф. Шуйский, Т.П. Занцинская, Д.С. Петров // *Сб. науч. тр. ГосНИОРХ*. — Вып. 326. — 2000. — С. 137–144.
8. Файнзильберг Л.С. Правдоподобные, но неверные решения при построении диагностических правил / Л.С. Файнзильберг // *Материалы восьмой дистанционной научно-практической конференции с международным участием «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР'2012»*. — Киев: ИПММС НАН Украины, 2012. — С. 31–34.

## **INVERSE PROBLEMS OF INTEGRATED EVALUATION: IDENTIFICATION OF CRITICAL COMPONENTS OF HEALTH AND ECOLOGICAL SITUATION**

**Pashinskaia S.L., Antomonov M.Yu.**

*State Institution «O.M.Marzeyev Institute for Hygiene and Medical Ecology of National Academy of Medical Sciences of Ukraine»*

**Introduction.** Integrated assessment of environmental quality in medical ecological research used different mathematical structures that are often weighted sum of expression of all reported hazards. The problem of optimal formation of integrated indicators is the direct problem of integral evaluation

**The purpose** of work is to develop methods, algorithms, computational formulas and software implementation for solving the inverse problem of the integral evaluation — identifying destabilizing factors in the assessment of ecological and hygienic objects.

**Results.** Realization of this aim requires the formulation and solution of problems phased: express processing of data array; the selection of informative features; construction of an integrated evaluation.

Algorithm of construction integrated evaluation is implemented as follows: the calculation of the normalized equivalents of selected indicators; calculation of weighted average grade of the objects on the normalized equivalents; calculation shifted integrated evaluation, as the square root of the product of the minimum and weighted average; comparison of average and shifted integrated evaluation; identification of critical elements.

The paper presents an automated technology analysis and evaluation of the primary indicators in order to optimize their list to calculate the integral evaluation. The technology allows to work with arrays having outliers and missing data. We consider a phased construction of an integrated assessment. The nonlinear algorithm of integration indicator formation and the method for identifying critical elements were developed.

**Conclusions.** The proposed technology allows to quickly implement the processing of the data array, to bring it to a format suitable for further, more detailed analysis and to form an integrated assessment. The results of processing may be performed within the environmental and medical objects; identify objects with the most adverse environmental conditions and disease. Calculation of displaced integral indicators shows destabilizing elements in the system of indicators.

**Keywords:** integrated evaluation, ecological and hygienic objects, medical and ecological research.

1. Lemeshko B.Yu., Rogozhnikov A.P. *Investigation of the features and power of some of the criteria of normality.* Metrologiya, 2009, no 4, pp. 3–24 (in Russian).
2. Vasil'yev V.I., Shevchenko A.I. *Recovery of missing data in empirical tables.* Iskusstvennyy intellect, 2003, no 3, pp. 317–324 (in Russian).

3. Zloba Ye., Yatskiv I. *Statistical methods for recovery of missing data*. Computer Modeling & New Technologies, 2002. Vol. 6. no 1. pp. 51–61 (in Russian).
4. Bakumenko L.P., Korotkov P.A. Integral assessment of the quality and environmental sustainability of the region (on the example of the Republic of Mari El). *Prikladnaya ekonometrika*. 2008, no 1(9), pp. 73–92 (in Russian).
5. Pavlov S. B. *Ekologichny rizik for Health Protection of the population*. Meditsinskiye issledovaniya, 2001. T. 1, vyp. 1, pp. 16–19 (in Ukrainian).
6. Antomonov M. Yu. *Mathematical processing and analysis of medical and biological data*, Kiyev, 2006. 558 p (in Russian).
7. Shuyskiy V.F., Zantsinskaya T.P., Petrov D.S. *Quantification and valuation of complex anthropogenic impact on macrozoobenthos*. Sb. nauch. tr. GosNIORKH. Vyp. 326. 2000, pp. 137–144 (in Russian).
8. Faynzilberg L.S. *Plausible, but wrong decisions in the construction of diagnostic rules*. Materialy vosmoy distantsionnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiyem. «Sistemy podderzhki prinyatiya resheniy. Teoriya i praktika. SPPR '2012». Kiyev: IPMMS NAN Ukrainy, 2012, pp. 31–34 (in Russian).

Получено 07.11.2014

## АВТОРЫ НОМЕРА

---

*Антонионов Михаил Юрьевич,*

доктор биологических наук,  
профессор, заведующий отделом  
медицинской информатики ГУ  
«Институт гигиены и медицинской  
экологии имени А.Н. Марзеева  
НАМН Украины», ул. Попудренко,  
50, г. Киев-94, 02660,  
email: antomonov@gmail.com

*Будник Николай Николаевич,*

доктор технических наук, ведущий  
научный сотрудник отдела сен-  
сорных приборов, систем и  
технологий бесконтактной  
диагностики Института киберне-  
тики им. В.М. Глушкова НАНУ,  
проспект Глушкова 40, г. Киев,  
03680 ГСП,  
email: budnyk@meta.ua.

*Вовк Майя Ивановна,*

кандидат биологических наук,  
старший научный сотрудник,  
заведующая отделом биоэлектри-  
ческого управления и медицинской  
кибернетики Международного  
научно-учебного центра информа-  
ционных технологий и систем НАН  
Украины и МОН Украины,  
проспект Глушкова 40, г. Киев,  
03680 ГСП,  
email: dep140@irtc.org.ua

*Галян Евгения Борисовна,*

младший научный сотрудник отдела  
биоэлектрического управления и  
медицинской кибернетики Между-  
народного научно-учебного центра  
информационных технологий и  
систем НАН Украины и МОН  
Украины, проспект Глушкова 40,  
г. Киев, 03680 ГСП,  
email: galevbor@mail.ru

*Городецкий Виктор Георгиевич,*

кандидат физико-математических  
наук, доцент Национального  
технического университета  
Украины «Киевский политехни-  
ческий институт», проспект  
Перемоги, 37, г. Киев, 03056,  
e-mail: v.gorodetskyi@ukr.net

*Доценко Сергей Иванович,*

кандидат физико-математических  
наук, старший научный сотрудник,  
доцент кафедры исследования  
операций факультета кибернетики  
Киевского национального универ-  
ситета имени Тараса Шевченко,  
пр. Глушкова, 4 Д, г. Киев, 03680,  
e-mail: sergei204@ukr.net

*Коваленко Александр Сергеевич,*

доктор медицинских наук,  
профессор, заведующий отделом  
медицинских информационных  
систем Международного научно-  
учебного центра информационных  
технологий и систем НАН и МОН  
Украины, проспект Глушкова 40,  
г. Киев, 03680 ГСП,  
email: askov49@gmail.com

*Милявский Юрий Леонидович,*

ассистент кафедры математических  
методов системного анализа УНК  
институт прикладного системного  
анализа Национального техни-  
ческого университета Украины  
«Киевский политехнический  
институт», проспект Перемоги, 37,  
г. Киев, 03056,  
email: yuriy.milyavsky@gmail.com

*Наджафян Тумаджани Мохаммадали,*

младший научный сотрудник отдела  
медицинских информационных  
систем Международного научно-  
учебного центра информационных  
технологий и систем НАН и МОН  
Украины, проспект Глушкова 40,  
г. Киев, 03680 ГСП,  
email: Najafian@mail.ru

*Норкин Богдан Владимирович,*

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела методов дискретной оптимизации математического моделирования анализа сложных систем Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, г. Киев, 03680, пр-т Глушкова, 40,  
email: bogdan.norkin@gmail.com

*Осадчук Николай Павлович,*

ассистент Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт», проспект Перемоги, 37, г. Киев, 03056,  
email: 13717421@ukr.net

*Пашинская Светлана Леонидовна,*

младший научный сотрудник отдела медицинской информатики ГУ «Институт гигиены и медицинской экологии имени А.Н. Марзеева НАМН Украины», ул. Попудренко, 50, г. Киев-94, 02660,  
email: Pashynska\_sv@gmail.com

*Романенко Виктор Демидович,*

заместитель директора по научно-педагогической работе УНК институт прикладного системного анализа Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт», проспект Перемоги, 37, г. Киев, 03056,  
email: ipsa\_mmsa@ukr.net