

## АЛГОРИТМ РЕКОНСТРУКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ОДНОЙ НАБЛЮДАЕМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В.Г. Городецкий, Н.П. Осадчук

*Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт»*

В статье предлагается алгоритм реконструкции динамической системы по единственной наблюдаемой переменной процесса, представленной в виде временного ряда. При этом неизвестная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений заменяется системой известного вида, в которой неизвестные переменные заменяются производными наблюдаемой переменной. Для нахождения коэффициентов реконструированной системы составляется переопределенная система линейных алгебраических уравнений, которая решается с помощью метода наименьших квадратов. Выполнена проверка правильности результатов алгоритма на численных примерах с учетом влияния точности представления исходных данных.

**Ключевые слова:** оригинальная система, стандартная система, реконструкция, метод наименьших квадратов, наблюдаемая переменная.

У статті пропонується алгоритм реконструкції динамічної системи за єдиною спостережною змінною процесу, представлена у вигляді часового ряду. При цьому невідома автономна система звичайних диференціальних рівнянь замінюється системою відомого виду, в якій невідомі змінні замінюються похідними спостереженої змінної. Для знаходження коефіцієнтів реконструйованої системи складається перевизначена система лінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується за допомогою методу найменших квадратів. Виконано перевірку правильності результатів алгоритму на численних прикладах з урахуванням впливу точності представлення вихідних даних.

**Ключові слова:** оригінальна система, стандартна система, реконструкція, метод найменших квадратів, спостережна змінна.

### ВВЕДЕНИЕ

Часто единственной информацией о некотором исследуемом процессе может быть дискретный временной ряд данных о поведении одной из переменных этого процесса. Для получения математической модели в этом случае необходимо решить задачу реконструкции системы по единственной наблюдаемой переменной [1, 2]. Пусть система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = F_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1)$$

описывает некоторый процесс, где  $x_1, \dots, x_n$  — переменные состояния процесса;  $F_1, \dots, F_n$  — полиномы. Систему (1) будем называть оригинальной системой (ОС) [3].

Допустим, единственной наблюдаемой переменной процесса будет  $x_1(t)$ . Широко распространен подход [4, 5], при котором неизвестные переменные системы (1) заменяются производными наблюдаемой переменной по времени, и вместо (1) рассматривается система (2)

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dots \\ \dot{y}_n = Y(y_1, \dots, y_n), \end{cases} \quad (2)$$

где  $Y$  — некоторая функция, которая выбирается таким образом, чтобы решение системы (2) (функция  $y_1(t)$ ) совпадало с наблюдаемой переменной ОС. Причем в некоторых случаях [5] это совпадение может быть точным ( $x_1(t) \equiv y_1(t)$ ), а в других [6, 7] речь идет о более или менее точной аппроксимации на некотором промежутке времени ( $x_1(t) \approx y_1(t)$ ). Систему (2) называют стандартной системой (СС), а функцию  $Y$  — стандартной функцией (СФ) [8]. В качестве СФ чаще всего выбирают полиномы различного вида [6], функции вида «полином плюс дробь» [3, 5] и отношение полиномов [5, 9]:

$$Y(y_1, \dots, y_n) = \frac{P_1(y_1, \dots, y_n)}{P_2(y_1, \dots, y_n)}. \quad (3)$$

Очевидно, что случай (3) наиболее универсальный из трех перечисленных, т.к. другие два типа СФ легко сводятся к (3).

**Цель** данной работы — усовершенствовать предложенный [5] алгоритм определения коэффициентов стандартной системы для повышения точности результатов.

## ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА

Преобразования, связывающие коэффициенты систем (1) и (2), достаточно сложны и громоздки, могут иметь нелинейный характер. Поэтому в литературе (например, [3]) приведены соотношения для различных случаев систем с числом переменных  $n \leq 3$ . Как было показано в [5], при использовании формы СФ (3) можно построить простой алгоритм для вычисления ее коэффициентов. Если принять  $n = 3$ , то СС (2) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = Y(y_1, y_2, y_3), \end{cases} \quad (4)$$

где

$$Y(y_1, y_2, y_3) = \frac{\sum_i N_i p_i(y_1, y_2, y_3)}{\sum_i D_i p_i(y_1, y_2, y_3)}. \quad (5)$$

В выражении (5) числитель и знаменатель — полиномы,  $N_i$  и  $D_i$  — постоянные коэффициенты,  $p_i(y_1, y_2, y_3)$  — произведения степеней переменных СС. В данной статье использовались приведенные в таблице 1 функции  $p_i(y_1, y_2, y_3)$ , которые соответствуют полиному третьей степени. При необходимости таблица 1 может быть дополнена произведениями более высоких степеней.

**Таблица 1**

*Произведения степеней переменных СС, используемые в (5)*

$i$	$p_i(y_1, y_2, y_3)$						
0	1	5	$y_1 y_2$	10	$y_1^3$	15	$y_1 y_3^2$
1	$y_1$	6	$y_1 y_3$	11	$y_1^2 y_2$	16	$y_2^3$
2	$y_2$	7	$y_2^2$	12	$y_1^2 y_3$	17	$y_2^2 y_3$
3	$y_3$	8	$y_2 y_3$	13	$y_1 y_2^2$	18	$y_2 y_3^2$
4	$y_1^2$	9	$y_3^2$	14	$y_1 y_2 y_3$	19	$y_3^3$

Заметим, что при умножении числителя и знаменателя (5) на одну и ту же постоянную величину значение  $Y(y_1, y_2, y_3)$  не изменится. Поэтому величины коэффициентов (5) не могут быть вычислены однозначно. Для устранения такой ситуации можно зафиксировать один из коэффициентов, считая его известным. Например, в [5] было принято  $D_0 = 1$ . Тогда после приведения к общему знаменателю и группировки слагаемых выражение (5) с учетом табл. 1 примет вид:

$$N_0 + N_1 y_1 + N_2 y_2 + \dots + N_{18} y_2 y_3^2 + N_{19} y_3^3 - D_1 y_1 \dot{y}_3 + D_2 y_2 \dot{y}_3 - \dots - D_{18} y_2 y_3^2 \dot{y}_3 - D_{19} y_3^3 \dot{y}_3 = D_0 \dot{y}_3, \quad (6)$$

где  $D_0 = 1$ .

Так как значения  $y_1$ ,  $y_2 = \dot{y}_1$ ,  $y_3 = \dot{y}_2$ ,  $\dot{y}_3$  легко вычисляются на основании данных о наблюдаемом временном ряде, то несложно получить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), в которой неизвестными станут коэффициенты  $N_i$  и  $D_i$  уравнения (6). При использовании этого уравнения для формирования СЛАУ может иметь место ситуация, когда  $D_0 = 0$ . Тогда, приняв предварительно  $D_0 = 1$ , мы получим при вычислении коэффициентов ошибочный результат. Следовательно,

необходимо иметь возможность фиксировать любой из коэффициентов СФ. Кроме этого, как будет показано далее, для реальных систем может быть заранее известно, какие коэффициенты СФ равны нулю. Поэтому предлагаемый алгоритм, в отличие от [5], предусматривает возможность присвоения произвольного значения любому из коэффициентов СФ. В этом случае целесообразно использовать более общий вид уравнения (6):

$$\begin{aligned} \sum_i N_i p_i(y_1, y_2, y_3) - \dot{y}_3 \sum_i D_i p_i(y_1, y_2, y_3) = \\ = \dot{y}_3 \sum_i \tilde{D}_i p_i(y_1, y_2, y_3) - \sum_i \tilde{N}_i p_i(y_1, y_2, y_3), \end{aligned} \quad (7)$$

где слева сгруппированы слагаемые, в которых  $N_i$  и  $D_i$  — неизвестные коэффициенты, а справа —  $\tilde{N}_i$ ,  $\tilde{D}_i$  — коэффициенты СФ, значения которых приняты известными.

На основе вышеизложенного можно предложить следующий алгоритм вычисления коэффициентов СС. Пусть  $y_1(j)$  — дискретная временная последовательность значений наблюдаемой переменной ОС с шагом дискретизации  $\Delta t$ , содержащая  $N$  точек. Используя уравнения системы (4), можно с помощью численного дифференцирования сформировать дискретные временные последовательности  $y_2(j)$ ,  $y_3(j)$ ,  $\dot{y}_3(j)$ . Для получения системы алгебраических уравнений, позволяющей вычислить коэффициенты СФ (5), формируется векторная временная последовательность

$$v(j) = \{y_1(j), y_2(j), y_3(j), \dot{y}_3(j)\}, \quad (8)$$

С учетом общего вида полиномов числителя и знаменателя (5), а также количества известных коэффициентов определяется число неизвестных коэффициентов СС  $k$ . В то же время число возможных алгебраических уравнений вида (7) для расчета коэффициентов  $N_i$  и  $D_i$  определяется количеством точек  $m$  в векторной временной последовательности (8). В результате получается система из  $m$  линейных алгебраических уравнений с  $k$  неизвестными. Для решения этой системы можно использовать метод наименьших квадратов, согласно которому [10]

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a} \mathbf{X} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{a}$  — матрица коэффициентов размера  $m \times k$ ; значения элементов этой матрицы определяются в каждой  $j$ -й точке на основании выражения в левой части уравнения (7); элементы вектора  $\mathbf{b}$  вычисляются для каждого  $j$  на основании правой части уравнения (7);  $\mathbf{X}$  — вектор искомых коэффициентов  $N_i$  и  $D_i$  числителя и знаменателя СФ системы (5).

Обозначим:  $\mathbf{a}^T \mathbf{a} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{B}$ . Тогда (9) примет вид:  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , откуда

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}. \quad (10)$$

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРИГИНАЛЬНЫХ СИСТЕМ, ОТНОСЯЩИХСЯ К R-КЛАССУ

Предлагаемый алгоритм был применен к моделированию ОС, относящихся к R-классу [8], т.е. системам вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ \dot{x}_2 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_1 x_2 + c_5 x_1 x_3 + c_6 x_2 x_3. \end{cases} \quad (11)$$

СС, соответствующая ОС (11), имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = \frac{1}{D_0 + D_1 y_1 + D_2 y_2} (N_0 + N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_1^2 + N_5 y_1 y_2 + \\ + N_6 y_1 y_3 + N_7 y_2^2 + N_8 y_2 y_3 + N_9 y_3^2 + N_{10} y_1^3 + N_{11} y_1^2 y_2 + N_{12} y_1^2 y_3 + \\ + N_{13} y_1 y_2^2 + N_{14} y_1 y_2 y_3 + N_{15} y_1 y_3^2 + N_{16} y_2^3). \end{cases} \quad (12)$$

К R-классу относится ряд хаотических систем, в том числе и система Ресслера [11], которая с учетом обозначений (11) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_3 x_3 + c_5 x_1 x_3. \end{cases} \quad (13)$$

Данная система была решена методом Рунге-Кутты 4-го порядка с коэффициентами  $a_2 = a_3 = -1$ ,  $b_1 = c_5 = 1$ ,  $b_2 = 0.15$ ,  $c_0 = 0.2$ ,  $c_3 = -10$  на временном интервале 40-с с шагом 0.002-с. Временные зависимости и фазовые портреты системы (13) представлены на рис. 1.

В качестве наблюдаемой была взята переменная  $x_1$ , т.е.  $y_1(t) \equiv x_1(t)$ . Очевидно, что трехкратное численное дифференцирование временного ряда  $y_1(t) = y_1(j)$  приводит к его незначительному укорочению, т.е.  $m < N$ . Величина этого укорочения зависит от вида применяемых формул численного дифференцирования. Использовались два разных способа численного дифференцирования. Первый способ использует формулу

$$\dot{y}_i(j) = \frac{y_i(j+1) - y_i(j-1)}{2\Delta t}. \quad (14)$$

Во втором способе для каждой точки  $y_i(j)$  временной последовательности на интервале  $[j-45, j+45]$  по методу наименьших

квадратов выполняется аппроксимация временной последовательности полиномом 4-ой степени, после чего аналитически вычисляется производная от аппроксимирующего полинома. Величина этого интервала, с одной стороны, достаточно велика, чтобы обеспечить хорошее сглаживание, а с другой стороны, достаточно мала, чтобы не привести к значительному искажению формы кривых  $\dot{y}_1(t)$ ,  $\ddot{y}_1(t)$ ,  $\ddot{y}_1(t)$ .

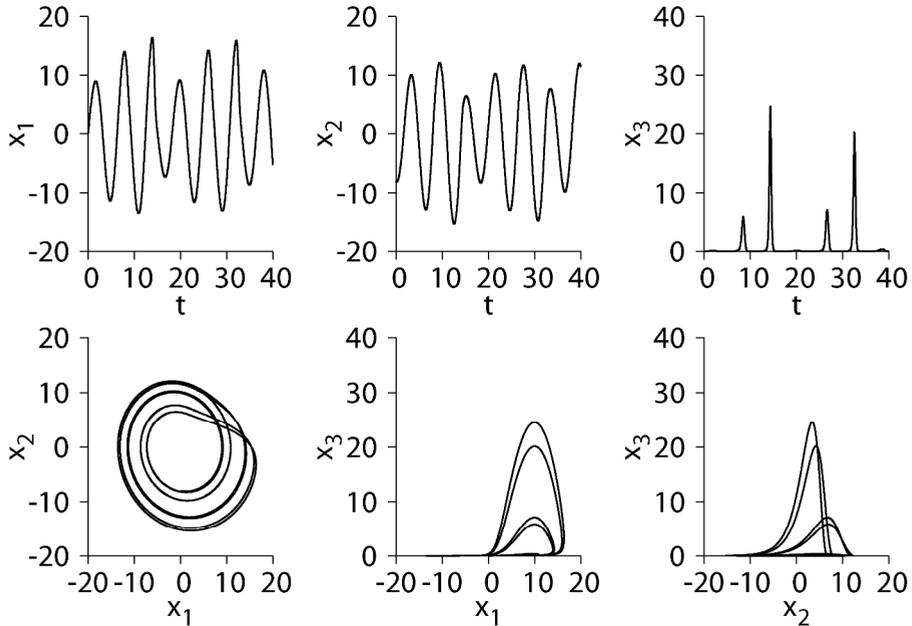


Рис. 1. Временные зависимости и фазовые портреты системы (13)

Размер матрицы  $\mathbf{a}$  с учетом укорочения при дифференцировании первым способом составил  $m \times k = 19994 \times 19$ , а при втором —  $m \times k = 19731 \times 19$ . С помощью соотношения (10) были определены значения коэффициентов СС (12), которые представлены в табл. 2. Для сравнения в таблице приведены точные значения, полученные с помощью аналитических соотношений между коэффициентами ОС и СС [8]. Из таблицы видно, что коэффициенты  $N_9, N_{13}, N_{14}, N_{15}, N_{16}$  и  $D_2$  малы, что позволяет принять их равными нулю. В этом случае система (12) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = \frac{1}{D_0 + D_1 y_1} (N_0 + N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_1^2 + N_5 y_1 y_2 + \\ + N_6 y_1 y_3 + N_7 y_2^2 + N_8 y_2 y_3 + N_{10} y_1^3 + N_{11} y_1^2 y_2 + N_{12} y_1^2 y_3). \end{cases} \quad (15)$$

Таблица. 2

Коэффициенты СС, определенные различными способами  
для переменной  $x_1(t)$  системы (13)

Коэффициент	Расчетные значения коэффициентов				Аналитические значения коэффициентов
	СС (12)		СС (15)		
	Способ дифференцирования 1	Способ дифференцирования 2	Способ дифференцирования 1	Способ дифференцирования 2	
$N_0$	0,02990	0,05140	0,02949	0,02393	0,03000
$N_1$	-10,00312	-10,06667	-10,00224	-10,01107	-10,00296
$N_2$	0,48033	0,48757	0,48022	0,48221	0,48030
$N_3$	-9,85017	-9,91567	-9,84924	-9,85755	-9,85000
$N_4$	1,98530	1,99797	1,98509	1,98555	1,98522
$N_5$	-0,29781	-0,30268	-0,29776	-0,29869	-0,29778
$N_6$	1,97054	1,98391	1,97031	1,97073	1,97044
$N_7$	0,01478	0,01512	0,01478	0,01490	0,01478
$N_8$	-0,09853	-0,10166	-0,09852	-0,09937	-0,09852
$N_9$	$1,45678 \cdot 10^{-5}$	$4,69638 \cdot 10^{-4}$	0	0	0
$N_{10}$	-0,09853	-0,09928	-0,09851	-0,09851	-0,09852
$N_{11}$	0,01478	0,01519	0,01478	0,01476	0,01478
$N_{12}$	-0,09853	-0,09934	-0,09851	-0,09852	-0,09852
$N_{13}$	$-2,40217 \cdot 10^{-7}$	$-4,83136 \cdot 10^{-5}$	0	0	0
$N_{14}$	$2,44258 \cdot 10^{-6}$	$2,79380 \cdot 10^{-4}$	0	0	0
$N_{15}$	$-1,75095 \cdot 10^{-6}$	$-7,97295 \cdot 10^{-5}$	0	0	0
$N_{16}$	$-1,12451 \cdot 10^{-7}$	$1,15990 \cdot 10^{-5}$	0	0	0
$D_0$	1	1	1	1	1
$D_1$	-0,09852	-0,09856	-0,09852	-0,09850	-0,09852
$D_2$	$3,93687 \cdot 10^{-7}$	$1,50274 \cdot 10^{-6}$	0	0	0

Значения коэффициентов этой системы рассчитаны аналогично предыдущему случаю и также представлены в табл. 2. Кроме этого, для оценки точности результатов рассчитаны относительные отклонения значений коэффициентов СС, полученных численным методом, от аналитических значений. Эти отклонения, вычисленные только для ненулевых коэффициентов СС, приведены в таблице 3.

Таблица. 3

Относительные отклонения значений коэффициентов СС  
при разных способах дифференцирования

Коэффициент	Относительные отклонения значений коэффициентов			
	СС (12)		СС (15)	
	Способ дифференцирования 1	Способ дифференцирования 2	Способ дифференцирования 1	Способ дифференцирования 2
$N_0$	$3,415 \cdot 10^{-3}$	0,713	0,017	0,202
$N_1$	$1,625 \cdot 10^{-5}$	$6,369 \cdot 10^{-3}$	$7,163 \cdot 10^{-5}$	$8,107 \cdot 10^{-4}$
$N_2$	$5,761 \cdot 10^{-5}$	0,015	$1,711 \cdot 10^{-4}$	$3,969 \cdot 10^{-3}$
$N_3$	$1,709 \cdot 10^{-5}$	$6,667 \cdot 10^{-3}$	$7,766 \cdot 10^{-5}$	$7,667 \cdot 10^{-4}$
$N_4$	$4,232 \cdot 10^{-5}$	$6,421 \cdot 10^{-3}$	$6,613 \cdot 10^{-5}$	$1,674 \cdot 10^{-4}$
$N_5$	$8,461 \cdot 10^{-5}$	0,016	$5,148 \cdot 10^{-5}$	$3,065 \cdot 10^{-3}$
$N_6$	$5,185 \cdot 10^{-5}$	$6,838 \cdot 10^{-3}$	$6,751 \cdot 10^{-5}$	$1,483 \cdot 10^{-4}$
$N_7$	$1,669 \cdot 10^{-5}$	0,023	$6,359 \cdot 10^{-5}$	$8,340 \cdot 10^{-3}$
$N_8$	$1,224 \cdot 10^{-4}$	0,032	$4,561 \cdot 10^{-5}$	$8,630 \cdot 10^{-3}$
$N_{10}$	$7,229 \cdot 10^{-5}$	$7,742 \cdot 10^{-3}$	$6,067 \cdot 10^{-5}$	$8,065 \cdot 10^{-5}$
$N_{11}$	$8,369 \cdot 10^{-5}$	0,028	$2,267 \cdot 10^{-4}$	$1,055 \cdot 10^{-3}$
$N_{12}$	$9,258 \cdot 10^{-5}$	$8,317 \cdot 10^{-3}$	$5,225 \cdot 10^{-5}$	$4,433 \cdot 10^{-5}$
$D_1$	$2,869 \cdot 10^{-6}$	$4,302 \cdot 10^{-4}$	$1,595 \cdot 10^{-5}$	$2,438 \cdot 10^{-4}$

Как видно из таблицы, дифференцирование 1-м способом приводит к более точному результату. Это объясняется тем, что при выбранных параметрах аппроксимирующего полинома его использование приводит к некоторому искажению формы кривой, из-за чего расчетные значения коэффициентов СС больше отклоняются от точных значений.

### ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ

Как известно [12], корректность решения (10) СЛАУ зависит от числа обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$ , а именно:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \left( \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\Delta \mathbf{B}\|}{\|\mathbf{B}\|} \right), \quad (16)$$

где  $\|\cdot\|$  — норма вектора или матрицы (здесь и далее использовалась евклидова норма),  $\Delta \mathbf{X}$  — вектор отклонений решения СЛАУ,  $\Delta \mathbf{A}$  — матрица отклонений фактических значений элементов матрицы  $\mathbf{A}$  от точных,  $\Delta \mathbf{B}$  — вектор отклонений фактических значений элементов вектора  $\mathbf{B}$  от точных,  $\text{cond}(\mathbf{A})$  — число обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$ .

Матрица  $\mathbf{A}$ , полученная для системы (12), имеет  $\text{cond}(\mathbf{A})=1,341 \cdot 10^9$ , а для упрощенной системы (15) —  $\text{cond}(\mathbf{A})=5,413 \cdot 10^7$ . Хотя приведенные в табл. 2 расчетные значения коэффициентов  $N_i$  и  $D_i$  близки к аналитическим, большие значения  $\text{cond}(\mathbf{A})$  говорят о возможной неустойчивости решений.

Для оценки границ возможной неустойчивости решений было исследовано влияние точности представления чисел на результат. В предыдущем разделе рассматривалась временная последовательность  $x_1(t)$  системы (13) со значениями в интервале  $(-13,6; 16,4)$ , представленными с точностью  $d=16$  знаков после запятой. Такая точность, как правило, недостижима в результате реальных измерений. Поэтому необходимо исследовать, как уменьшение точности исходных данных повлияет на результаты, полученные с помощью предложенного алгоритма. В нашем численном эксперименте уменьшение точности осуществлялось путем отбрасывания младших разрядов для всех точек временной последовательности.

В табл. 4 приведены величины из соотношения (16), которые характеризуют ошибки результатов в зависимости от точности представления значений исходного временного ряда  $y_1(t) \equiv x_1(t)$ . Эти же результаты представлены графически в логарифмическом масштабе на рисунках 2 и 3. Как видно из табл. 4, при численном дифференцировании по формуле (14) отношение  $\|\Delta X\|/\|X\|$  становится неприемлемо большим при  $d \geq 7$  (соответствующие значения выделены в таблице жирным шрифтом). В то же время 2-й способ дифференцирования обеспечивает получение адекватных результатов при точности исходных данных меньшей на 4 порядка по сравнению с 1-м способом.

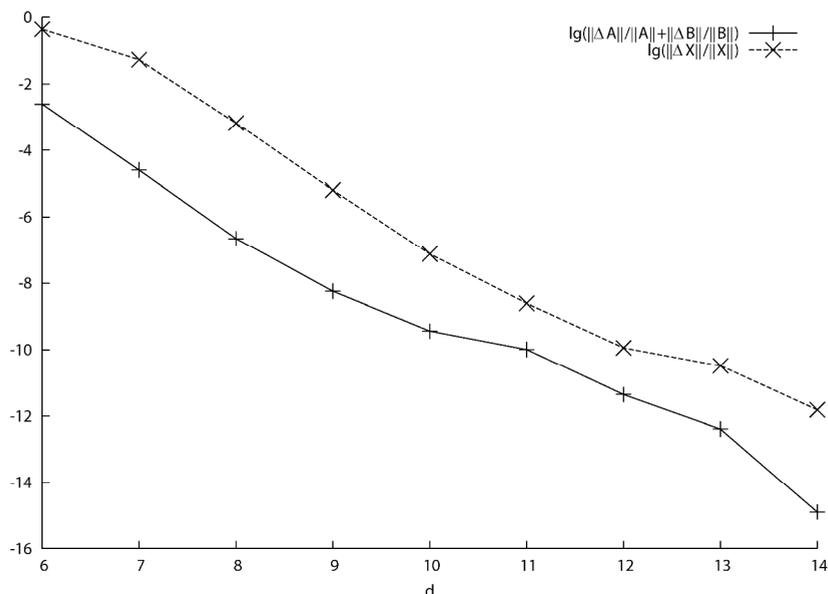


Рис. 2. Зависимости составляющих формулы (16) от точности представления исходных данных при использовании 1-го способа дифференцирования

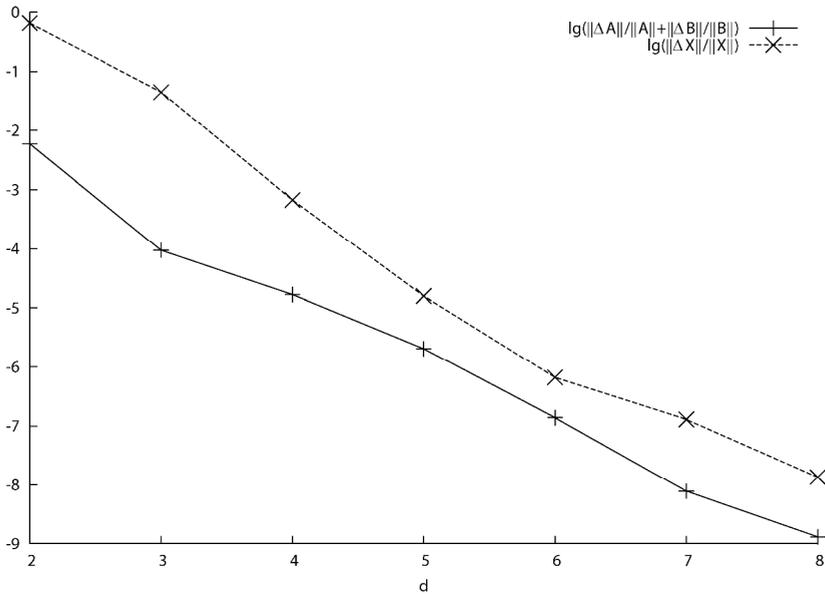


Рис. 3. Зависимости составляющих формулы (16) от точности представления при использовании 2-го способа дифференцирования

Таблица 4

Значения составляющих выражения (16) в зависимости от точности представления исходных данных

d	Способ дифференцирования 1		Способ дифференцирования 2	
	$\frac{\ \Delta A\ }{\ A\ } + \frac{\ \Delta B\ }{\ B\ }$	$\frac{\ \Delta X\ }{\ X\ }$	$\frac{\ \Delta A\ }{\ A\ } + \frac{\ \Delta B\ }{\ B\ }$	$\frac{\ \Delta X\ }{\ X\ }$
14	$1,259 \cdot 10^{-15}$	$1,538 \cdot 10^{-12}$	-	-
13	$4,075 \cdot 10^{-13}$	$3,257 \cdot 10^{-11}$	-	-
12	$4,407 \cdot 10^{-12}$	$1,149 \cdot 10^{-10}$	-	-
11	$1,016 \cdot 10^{-10}$	$2,483 \cdot 10^{-9}$	-	-
10	$3,661 \cdot 10^{-10}$	$7,516 \cdot 10^{-8}$	-	-
9	$5,687 \cdot 10^{-9}$	$6,326 \cdot 10^{-6}$	-	-
8	$2,233 \cdot 10^{-7}$	$6,601 \cdot 10^{-4}$	$1,302 \cdot 10^{-9}$	$1,362 \cdot 10^{-8}$
7	$2,526 \cdot 10^{-5}$	<b>0,053</b>	$8,071 \cdot 10^{-9}$	$1,291 \cdot 10^{-7}$
6	$2,472 \cdot 10^{-3}$	<b>0,431</b>	$1,376 \cdot 10^{-7}$	$6,596 \cdot 10^{-7}$
5	-	-	$2,029 \cdot 10^{-6}$	$1,579 \cdot 10^{-5}$
4	-	-	$1,668 \cdot 10^{-5}$	$6,726 \cdot 10^{-4}$
3	-	-	$9,693 \cdot 10^{-3}$	<b>0,045</b>
2	-	-	$5,978 \cdot 10^{-3}$	<b>0,65</b>

Очевидно, что в нашем случае основными источниками погрешностей являются низкая точность представления значений исходного числового ряда и вычислительный шум, возникающий при численном дифференцировании. Влияние этих факторов иллюстрирует график, представленный на рис. 4, где приведен фрагмент зависимости  $\ddot{y}_1(t)$  для  $d=7$  и  $d=16$  при дифференцировании по формуле (14). При высокой точности ( $d=16$ ) график практически не имеет шума, а при низкой ( $d=7$ ) — величина шума сравнима с полезным сигналом, что приводит к значительной погрешности вектора **B** и, как следствие, к значительной ошибке результата — вектора

Х. При применении 2-го способа дифференцирования погрешность  $\ddot{y}_1(t)$  — значительно меньше и достигает величин, искажающих результат, при точности задания исходного временного ряда  $d = 3$ , что видно из рис. 5.

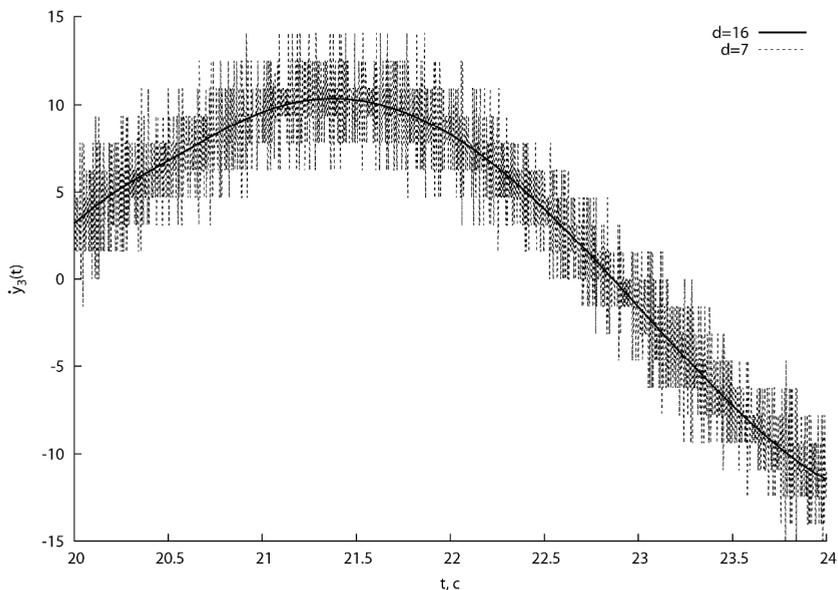


Рис. 4. Фрагмент временного ряда  $\dot{y}_3(t) \equiv \ddot{x}_1(t)$  при использовании 1-го способа дифференцирования для 2-х значений точности представления исходных данных

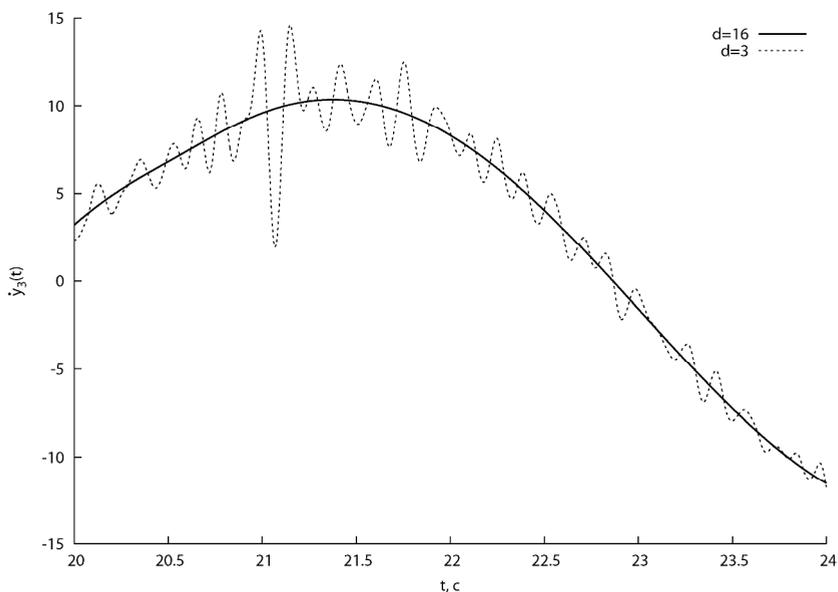


Рис. 5. Фрагмент временного ряда  $\dot{y}_3(t) \equiv \ddot{x}_1(t)$  при использовании 2-го способа дифференцирования

Следует отметить, что для рассмотренной временной последовательности при  $d = 2$  шаг дискретизации по амплитуде составляет примерно  $1/3000$  от диапазона изменения значений  $y_1(t) \equiv x_1(t)$ , что сопоставимо с точностью измерений, доступной на практике. Таким образом, используя метод численного дифференцирования, устойчивый к шумам и понижению точности, можно применить предложенный алгоритм для реконструкции реальных временных последовательностей.

## Выводы

В статье предложен алгоритм вычисления коэффициентов стандартной системы на основе временной последовательности одной наблюдаемой переменной оригинальной системы. Предлагаемый подход позволяет расширить область применения алгоритма [5] за счет возможности присвоения любым коэффициентам стандартной функции произвольных известных значений. Проведенный анализ показал значительное влияние точности представления чисел исходного временного ряда на ошибку вычислений.

Так как одной из основных операций данного алгоритма является численное дифференцирование, следует предвидеть возможное увеличение ошибок из-за этой операции. При высокой точности задания исходных данных дифференцирование с использованием простых соотношений обеспечивает меньшую погрешность определения коэффициентов стандартной системы, а при понижении точности исходных данных преимущество имеет дифференцирование с использованием аппроксимирующего полинома. Также для уменьшения вычислительного шума, появляющегося при численном дифференцировании, можно использовать сглаживание как исходной временной последовательности, так и ее производных.

Алгоритм может быть обобщен на случай дробно-рациональной стандартной функции с большим числом слагаемых. Существование систем, реконструкция которых возможна с использованием стандартной функции более общего вида, подтверждается предварительными результатами, которые будут представлены в дальнейшем.

1. Cremers J. Construction of differential equations from experimental data / J. Cremers, A. Hubler // *Naturforsch.* — 1987. — vol. 42a. — P. 797–802.
2. Breeden J. L. Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables / J. L. Breeden, A. Hubler // *Phys. Rev. A.* — 1990. — Vol. 42. — P. 5817–5826.
3. Gouesbet G. Reconstruction of standard and inverse vector fields equivalent to the Rössler system / G. Gouesbet // *Phys. Rev. A.* — 1991. — Vol. 44. — P. 6264–6280.
4. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // in: D.A. Rand, L.S. Young (Eds.), *Dynamical System and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics.* — New York : Springer. — 1981. — No. 898. — P. 366–381.
5. Gouesbet G. Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series / G. Gouesbet // *Phys. Rev. A.* — 1991. — Vol. 43. — P. 5321–5331.

6. Gouesbet G. Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L2 approximation on nets / G. Gouesbet, C. Letellier // *Phys. Rev. E.* — 1994. — Vol. 49, No. 6. — P. 4955–4972.
7. Maquet J. Scalar modeling and analysis of a 3D biochemical reaction model / J. Maquet, C. Letellier, L. A. Aguirre // *Journal of Theoretical Biology.* — 2004. — Vol. 228. — P. 421–430.
8. Gorodetskyi V. Reconstruction of chaotic systems of a certain class / V. Gorodetskyi, M. Osadchuk // *International Journal of Dynamics and Control.* — Available at: DOI 10.1007/s40435-014-0100-y.
9. Le Sceller L. Structure selection for Global vector field reconstruction by using the identification of fixed points / L. Le Sceller, C. Letellier, G. Gouesbet // *Phys. Rev. E.* — 1999. — Vol. 60, No. 2. — P. 1600–1606.
10. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения / Г. Стренг. — М. : Мир, 1980. — 459 с.
11. Rössler O. E. An equation for continuous chaos / O. E. Rössler // *Phys. Lett. A.* — 1976. — Vol. 57. — P. 397–398.
12. Форсайт Дж. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений / Дж. Форсайт, К. Молер. — М. : Мир, 1969. — 164 с.

UDC 517.925

## **ALGORITHM FOR RECONSTRUCTING THE DYNAMICAL SYSTEMS USING ONE OBSERVABLE VARIABLE**

**V.G. Gorodetskyi, M.P. Osadchuk**

*National technical university of Ukraine “Kyiv polytechnic institute”.*

**Introduction.** We consider the problem of reconstructing the system of ordinary differential equations by using one observable variable. The data under investigation is a scalar time series of some process data. It is assumed that the dynamics of the process can be described by an original system of ordinary differential equations with polynomial right-hand sides. We replace the original system by standard system of known type in which the unknown variables are replaced by derivatives of the observable variable, and one of the variables of the standard system is the same as observable variable. We use standard systems which have the ratio of polynomials with unknown coefficients in the right-hand sides.

**The purpose** of this work is to simplify and improve the accuracy of G. Gouesbet algorithm for determining the coefficients of the standard system.

**Methods.** As well as in the prototype algorithm, the time series is differentiated to find all the variables of the standard system. Then we form the system of linear algebraic equations which are solved with respect to the unknown coefficients of the standard system. The algorithm uses such novelties: ability to assign the known values for any coefficient of the standard system, solving the overdetermined algebraic system by using least square method, possibility to use different methods of differentiation.

**Results.** Algorithm was utilized to reconstruct standard system by use of one variable of Rössler system and other systems with chaotic evolution. All the results confirmed the effectiveness of the algorithm improvements.

**Conclusion.** The proposed novelties allow to improve the accuracy of computing the coefficients of the standard system and simplify the algorithm.

**Keywords:** original system, standard system, reconstructing, least square method, observable variable.

1. Cremers J., Hubler A. Construction of differential equations from experimental data. *Naturforsch*, 1987, vol. 42a, pp. 797–802.
2. Breeden J.L., Hubler A. Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables. *Phys. Rev. A*, 1990, vol. 42, pp. 5817–5826.
3. Gouesbet G. Reconstruction of standard and inverse vector fields equivalent to the Rössler system. *Phys. Rev. A*, 1991, vol. 44, pp. 6264–6280.
4. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. In: D.A. Rand, L.S. Young (Eds.), *Dynamical System and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics*. Springer, New York, 1981, no. 898, pp. 366–381.
5. Gouesbet G. Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series. *Phys. Rev. A*, 1991, vol. 43, pp. 5321–5331.
6. Gouesbet G., Letellier C. Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L2 approximation on nets. *Phys. Rev. E*, 1994, vol. 49, no. 6, pp. 4955–4972.
7. Maquet J., Letellier C., Aguirre L. A. Scalar modeling and analysis of a 3D biochemical reaction model. *Journal of Theoretical Biology*, 2004, vol. 228, pp. 421–430.
8. Gorodetskiy V., Osadchuk M. Reconstruction of chaotic systems of a certain class. *International Journal of Dynamics and Control*. Available at: DOI 10.1007/s40435-014-0100-y.
9. Le Sceller L., Letellier C., Gouesbet G. Structure selection for Global vector field reconstruction by using the identification of fixed points. *Phys. Rev. E*, 1999, vol. 60, no. 2, pp. 1600–1606.
10. Strang G. *Linear Algebra and Its Applications*. Thomson Brooks/Cole, 2006, 487 p.
11. Rössler O.E. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A*, 1976, vol. 57, pp. 397–398.
12. Forsythe G. E., Moler C.B. *Computer solution of linear algebraic systems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1967, 148 p.

Получено 30.01.2015